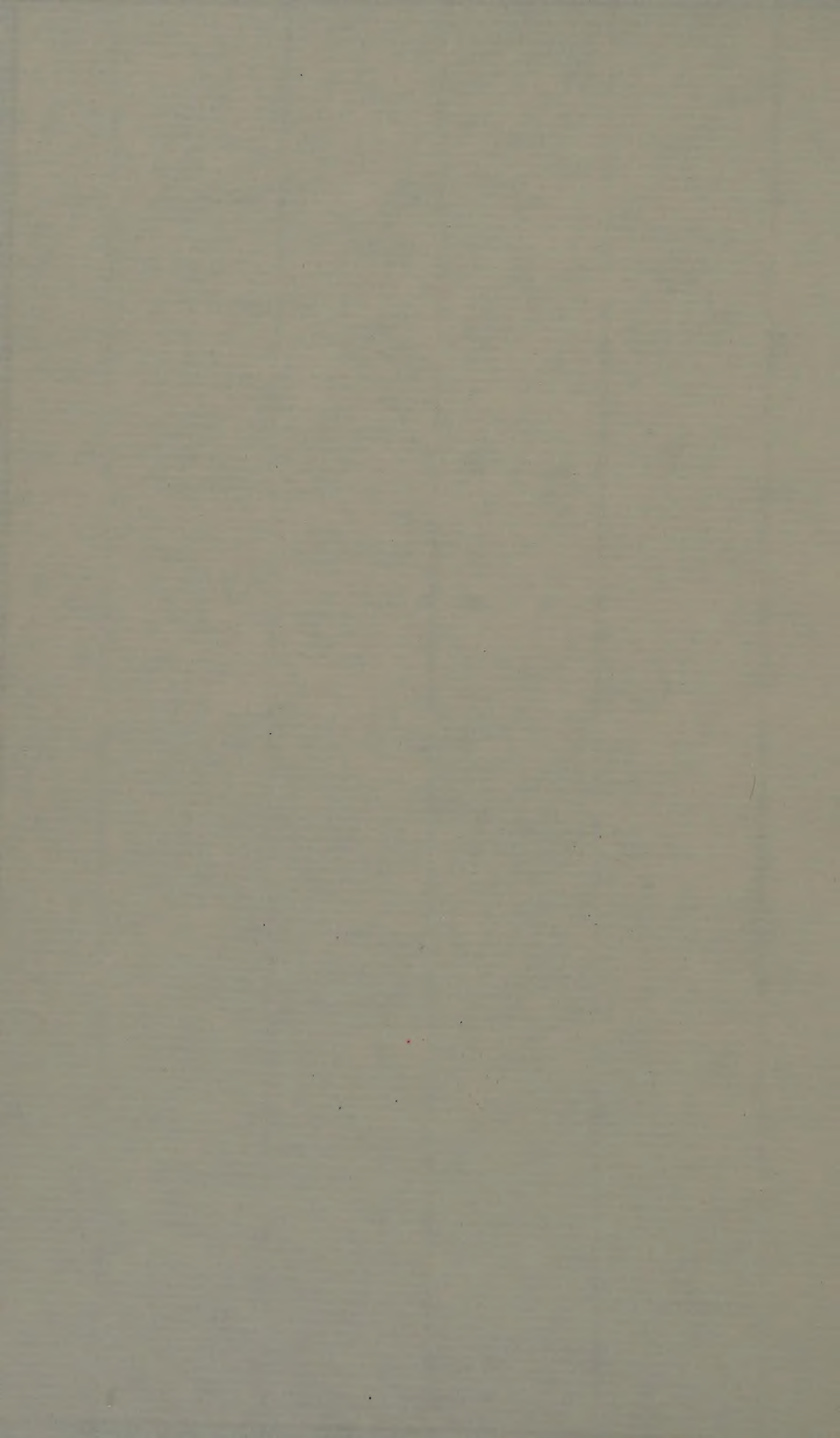





MEMORIAL UNIVERSITY
JAN 18 1985
LIBRARY
OF NEWFOUNDLAND
WITHDRAWN



Band 33 der ORPHEUS-Schriftenreihe zu Grundfragen der Musik

herausgegeben von Martin Vogel

Helmut Reis

Harmonie und Komplementarität

Harmonikale Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes

Verlag für
systematische Musikwissenschaft
GmbH

Bonn - Bad Godesberg 1983

Printed in Germany
ISBN 3-922626-24-6

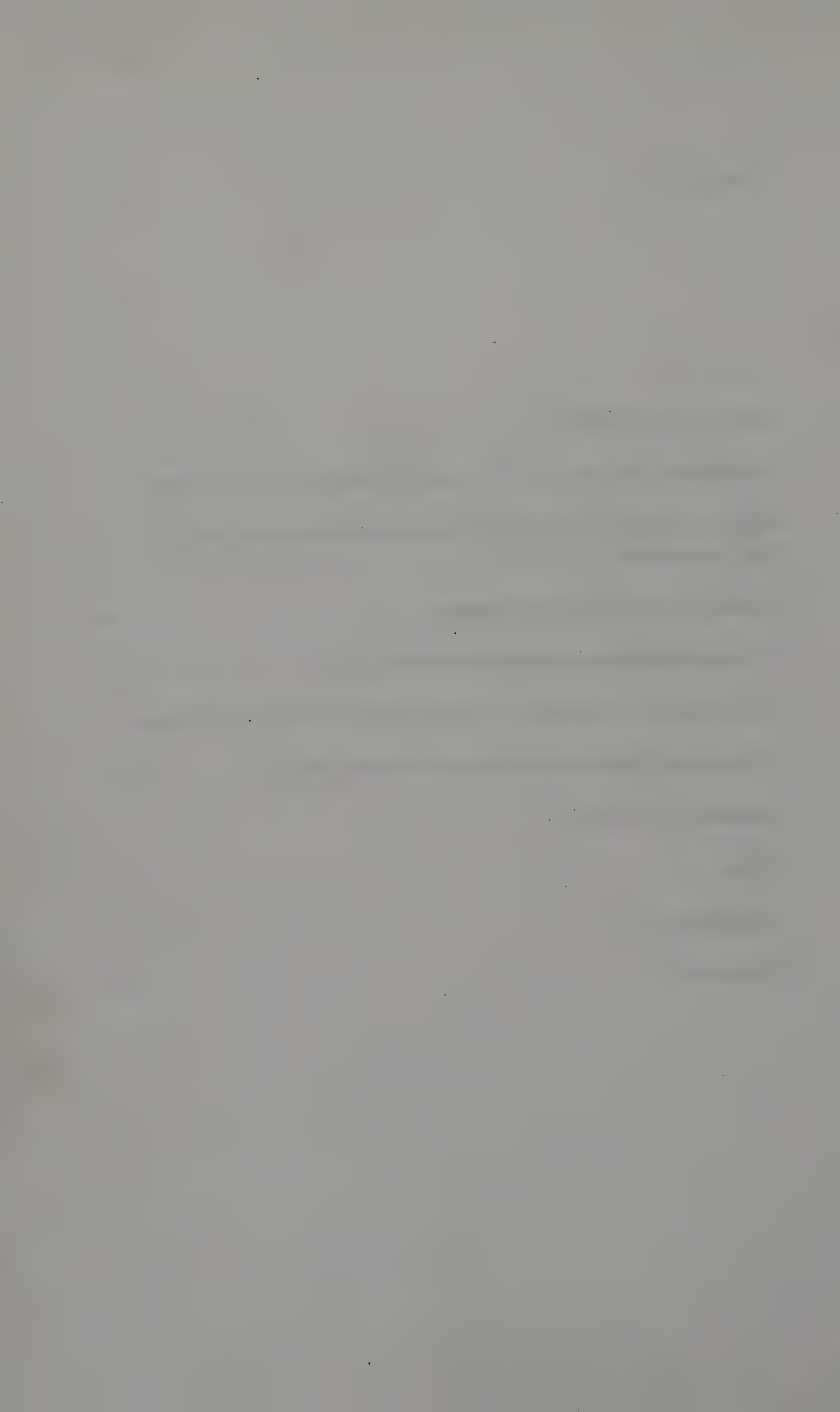
VORBEMERKUNG

Mein aufrichtiger Dank gilt allen, die durch Rat, Kritik und Hilfe dieses Buch gefördert haben: Dörte Baeumer, Hannelore und Klaus Ebert, Dr. Fritz Jerrentrup, Dr. Paul v. Naredi-Rainer, Erich Schallus; darüber hinaus Prof. Alfons Köster für die zahlreichen harmonikalen Gespräche über viele Jahre; Hans Scheid für die Anregungen und Diskussionen, die wesentlich zur harmonikalen Lösung der Spektralserien beigetragen haben; meiner Tochter Susanne für ihre unermüdliche Arbeit bei der Ausarbeitung des Manuskripts und beim Korrekturlesen; und meiner Tochter Ulrike für die Ausführung sämtlicher Zeichnungen. Ganz besonders möchte ich Prof. Martin Vogel danken für die vielfältige Unterstützung zum Gesamtthema und die Herausgabe des Buches in der Orpheus-Reihe.

29. Mai 1983

Helmut Reis

INHALT



HARMONIKALE STEREOMETRIE

Zwiefach den Bogen spannend ist die Harmonie,
die den Pfeil schießt durch die Gegensätze.

Heraklit[1]

Die Idee der *Harmonie und Komplementarität* bedeutet, daß sich zwei Teile zu einem harmonischen Ganzen *komplementieren* (ergänzen). Es gilt, diesen Gedanken der Ganzheit über die *harmonikale Stereometrie* in einen größeren Rahmen zu stellen. Mit ihr soll zum Ausdruck gebracht werden, daß hier ein neuer Weg beschritten werden soll, um einen harmonikal-strukturierten Raum zu beschreiben. Als Grundlage für eine solche Untersuchung dienen die *pythagoreischen Dreiecke,* deren harmonikale Umwandlung eine Verbindung schafft zwischen den Kristallen, den Spektrallinien und den Intervallen.

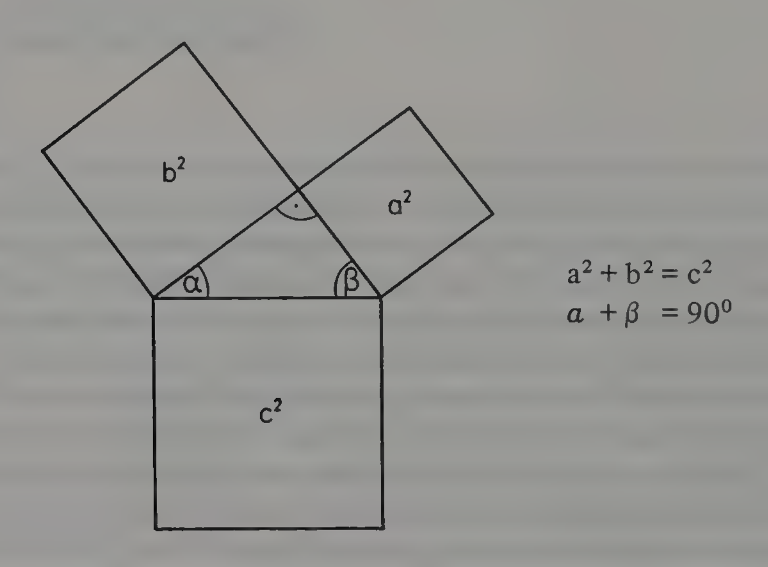
Die Idee, von den exakten Gebilden, wie sie die Natur in den Kristallen darstellt, eine Brücke zur Musiktheorie zu schlagen, ist nicht neu und mit den bekannten Kristallographen Christian Samuel WEISS (1780-1856) und Victor GOLDSCHMIDT (1853-1933) verbunden. Weiss fand 1809 das *Rationalitätsgesetz*[2] und Goldschmidt 1901 das *Komplikationsgesetz*[3]. Sie stellten außerdem, was wenig bekannt ist, über die einfachen rationalen Zahlen eine Verbindung zwischen den Kristallen und den Tönen her.

So hat auch der Titel *Harmonie und Komplementarität* den gleichen harmonikalen Hintergrund wie Victor Goldschmidts Buch „Harmonie und Complication“[4], nämlich die Kristalle. Goldschmidt hat schon um 1900 diesen Gedanken der Harmonie aus dem Kristallgesetz der Komplikation entwickelt und auf andere Bereiche der Wissenschaft, auf Musik- und Farbentheorie, Astronomie u. a. übertragen. In meiner Schrift soll nun der in Goldschmidts Buch „Ueber Harmonie und Complication“ enthaltene Ansatz: *die Harmonie in den Kristallen* weiterentwickelt werden, wobei sich über die pythagoreischen Zahlendreiecke ein neuer, noch nicht verfolgter Ansatz ergibt, den harmonikalen Hintergrund der Kristallkörper stärker hervortreten zu lassen. In der vorliegenden Abhandlung wird die Idee der Harmonie im wesentlichen auf die Teilbereiche Kristal-

1) Heraklit bei Porphyr. d. antr. n. 29; in der Übersetzung von A. v. Thimus, Harmonikale Symbolik des Alterthums, Band 1, Köln 1868, 14. 207ff.
2) P. Ramdohr und H. Strunz, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, Stuttgart 1978[16], 18.
3) Ebenda, 24.
4) V. Goldschmidt, Ueber Harmonie und Complication, Berlin 1901.

lographie, Physik der Spektrallinien und Musiktheorie/Harmonik beschränkt, da sich hier die harmonikale Komplementarität am deutlichsten zeigt.

Diese Komplementarität hat ihren geschichtlichen Hintergrund in der Geometrie und zwar in den rechtwinkligen Dreiecken, da sich deren Winkel α und β an der Hypotenuse *komplementär* zu 90^0 ergänzen.



Der *Satz des Pythagoras* bildet die Grundlage der pythagoreischen Zahlentripel, deren drei positive rationale Zahlen a, b, c der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ entsprechen.

Satz des Pythagoras: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate. Es ist

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beispiele:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

. . . . .

Man kann den pythagoreischen Lehrsatz auch in der trigonometrischen Form der Winkelbeziehungen darstellen, um die Komplementarität der Winkel α und β herauszustellen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1^2$$

Es ist wichtig, die geometrische Priorität zu unterstreichen, da der Begriff der Komplementarität auch in anderen Bereichen der Wissenschaft Eingang gefunden hat, wie z. B. in der Farbentheorie, der Atomphysik oder der Biologie, mit diesem Wort dort jedoch teilweise andere Inhalte verbunden werden.

Die harmonikale Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes ist der Schlüssel zu einem Einstieg in die Komplementarität als Idee der harmonischen Ganzheit.

Der Satz des Pythagoras oder kurz *der Pythagoras* wurde früher in Frankreich und in einigen Gegenden Deutschlands auch *le pont aux ânes, Eselsbrükke* genannt[1]. Geht man von den zahlreichen Darstellungen des musizierenden Esels in Antike und Mittelalter aus[2], so läßt sich wenigstens symbolisch eine Brücke schlagen zwischen der Geometrie und Arithmetik einerseits und der Harmonik und Musiktheorie andererseits.

Zwar gilt der Satz des Pythagoras als das besterforschte Theorem der Mathematik – in der mathematischen Literatur sind über 360 Beweise bekannt[3] –, doch gerade über diese Verbindung zwischen den pythagoreischen Zahlentripeln als zweidimensionalen, geometrischen Gebilden und einem harmonikalen, dreidimensionalen Raum ist in der entsprechenden Literatur meines Wissens nichts zu finden.

Es gilt für die vorliegende Behandlung des Themas zuerst den Nachweis zu führen, daß Musiktheorie und Harmonik sich aufs engste mit dem pythagoreischen Lehrsatz der Geometrie verbinden lassen, mehr noch, daß die *pythagoreische Stimmung* in der Musiktheorie und der pythagoreische Lehrsatz am Beispiel des einfachsten pythagoreischen Dreiecks mit den Seitenlängen 3:4:5 in der „Idee“ identisch sind. (Im folgenden werden die pythagoreischen Zahlentripel grundsätzlich in der Form a–b–c, also 3–4–5, 5–12–13 etc. dargestellt.)

Es ist das Ziel dieser Abhandlung, zu zeigen, daß die Musiktheorie ihren harmonikalen Hintergrund in der Natur hat, so daß man von einer echten *Naturstimmung* sprechen kann.

Es läßt sich durchaus eine Verbindung herstellen zwischen zwei so weit auseinander liegenden Bereichen wie der Kristallographie und der musikalischen Akustik, wenn man die *harmonische Analyse* oder *Fourier-Analyse* als Verbindungsglied einbezieht. Es ist bekannt, daß das gleiche Analyseverfahren sowohl bei der mathematischen Auflösung von Geräuschen und Klängen in einzelne Töne als auch bei der Bestimmung von Kristallstrukturen zur Anwendung kommt[4]. Schon von hier aus ergibt sich, daß es zwischen den beiden Bereichen auch

1) W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz, Leipzig 1951[6], 6.
2) M. Vogel, Onos Lyras. Der Esel mit der Leier, Düsseldorf 1973.
3) E. S. Loomis, The Pythagorean Proposition, Ann Arbor, Michigan 1940; Washington 1968[2].
4) Das große Dudenlexikon, Mannheim 1965; Der große Herder, Freiburg i. Br. 1954.

eine übergreifende Verbindung geben muß, die über das rein Mathematische eines solchen Analyseverfahrens hinausgeht und den harmonikalen Hintergrund sowohl für die Kristalle als auch für die Töne bildet. Ein solcher Gedanke wird zumindest durch den Begriff *harmonisch* nahegelegt, der ja eben nicht nur in der Musiktheorie, sondern auch in anderen Wissenschaftszweigen beheimatet ist.

Es ist in dieser Abhandlung nicht meine Absicht, zur Musiktheorie oder zur Kristallographie eine spezielle Theorie zu entwickeln. Mein Ziel ist, die gemeinsame mathematisch-harmonikale Grundlage der beiden Bereiche offenzulegen.

Eine *Morphologie der Musik*, d. h. eine Ableitung musiktheoretischer Grundsätze aus einer Lehre von den Gestalten und Körpern, setzt geometrisch-arithmetische und harmonikale Untersuchungen in einem gleichberechtigten Sinne voraus. Gerade dies ist bei den meisten musiktheoretischen Lehrschriften nicht der Fall. Genauso ist es bei den Mathematikbüchern, in denen allenfalls Begriffe wie *harmonische Teilung, harmonisches Mittel, harmonische Proportion* und *harmonische Analyse* auf eine Beziehung zur Harmonik hinweisen.

Geometrie, Harmonik, Arithmetik sollen über die Körper, wie sie die Natur in den Kristallen ausbildet, in ihrer übergreifenden Symbiose dargestellt werden. Von harmonikaler Seite versuchte es insbesondere Hans KAYSER, in diesen Raum der harmonikalen Stereometrie einzudringen. So ist es nicht verwunderlich, daß viele harmonikale Grundbegriffe und Ausdrücke aus seinem „Lehrbuch der Harmonik" entlehnt werden müssen[1].

Die harmonikale Stereometrie setzt sich nicht nur mit den mathematischen Körpern auseinander, sondern versucht, auf harmonikaler Basis zu erklären, warum ein Körper in der Natur auftreten kann oder warum nicht, und welche Folgerungen sich daraus ergeben. Von der Mathematik werden einige dieser Körper beschrieben:

– die fünf Platonischen Körper und ihre entsprechenden Sternkörper,
– die dreizehn Archimedischen Körper;

von ihnen kommen einige als Kristalle in der Natur vor, andere dagegen nicht. So würde man z. B. die regelmäßige Form des Pentagondodekaeders niemals als Kristall finden, während die entsprechenden kristallinen Formen, bei denen jede Fläche vier gleiche und eine längere oder kürzere Seite hat, sehr häufig, z. B. beim Pyrit, aber auch bei anderen Mineralien, anzutreffen sind. Interessanterweise lassen sich nur solche Körper in einem harmonikalen Raum beschreiben, die auch als Kristalle in der Natur vorkommen, während die ande-

1) H. Kayser, Der hörende Mensch, Berlin 1932; ders., Akroasis. Die Lehre von der Harmonik der Welt, Basel 1946, 1964²; ders., Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950; R. Haase, Kaysers Harmonik in der Literatur der Jahre 1950 bis 1964, Düsseldorf 1967.

ren, mögen sie noch so regelmäßig und symmetrisch ausgebildet sein, ausscheiden. So ist es verständlich, daß eine harmonikale Untersuchung dieser Kristallkörper auf den Ergebnissen der Kristallographie aufbaut und diese, soweit es möglich ist, berücksichtigt.

Und doch läßt sich gerade durch die Einbeziehung der harmonikalen Idee zeigen, daß man diese Kristallkörper bei gleichen Ausgangsvorstellungen am pythagoreischen Dreieck auch anders beschreiben kann. Dabei kristallisieren sich überraschenderweise mathematische und harmonikale Gesetzmäßigkeiten heraus, die nicht nur für die Harmonik von Interesse sind, sondern darüber hinaus allgemeinen Charakter haben.

Es ist aber nicht notwendig, auf alle möglichen Varianten einer Verbindung von Geometrie–Harmonik–Arithmetik im einzelnen einzugehen. Es genügt, an wenigen Beispielen den prinzipiellen Unterschied zwischen einer rein geometrischen und einer harmonikalen Untersuchung herauszustellen. Dies geschieht zunächst an dem pythagoreischen Dreieck mit den Seitenzahlen 3–4–5 in seinem stereometrischen Zusammenhang mit den komplementären Intervallen Quinte und Quarte.

Es folgen die weiteren einfachen pythagoreischen Zahlentripel in ihrer Beziehung zu den Intervallen auf harmonikal-komplementärer Basis. Anschließend wird auf den Zusammenhang von pythagoreischen Zahlentripeln und zusätzlichen harmonikalen Strukturelementen und deren vielfältige Verbindungen untereinander eingegangen werden, zumal sich, auf dieser Thematik aufbauend, weitere morphologische Gesetzmäßigkeiten ableiten lassen.

So wird hier der Versuch gemacht, den harmonikalen Raum so einfach wie möglich zu beschreiben, um auszudrücken, daß dies kein spezielles Gebiet der Kristallographie oder der Musiktheorie ist, sondern *harmonikale Stereometrie*.

Dafür ist es notwendig, neben der üblichen Betrachtung der Dinge – der *Aisthesis* „Anschauung“ – auch den harmonikalen Weg der *Akroasis* „Anhörung“ im Sinne Hans KAYSERs zu beschreiten. Dies ist insbesondere mit Hilfe des Monochords möglich, das die Grundlage für eine harmonikale Bewertung liefert.

In diesem Sinne sollte das vorgestellte Thema gesehen bzw. harmonikal gehört werden.



DAS PYTHAGOREISCHE DREIECK 3–4–5 UND SEINE BEZIEHUNG ZUM DREIKLANG

Kein Dreieck spielt eine so ausgeprägte Rolle in seinem allgemeinen Verständnis – heute genau wie in früheren Zeiten – wie gerade dieses pythagoreische Dreieck 3–4–5.

Der Satz des Pythagoras ist so bekannt und so oft beschrieben und interpretiert worden, daß es nicht nötig ist, auf ihn und seine Geschichte detailliert einzugehen. Fest steht, daß die alten Ägypter, Babylonier, Chinesen und Griechen ihn kannten. Darüber hinaus sind Keilschrifttafeln der älteren babylonischen Zeit bekannt, auf denen bis zu vierstellige rationale Zahlentripel, die rechtwinkligen Dreiecken entsprechen, notiert sind. Sie setzen detaillierte mathematische Kenntnisse voraus. Pythagoras soll in Babylon und Ägypten gewesen und dort auch in den mathematischen Wissenschaften unterrichtet worden sein.

Der Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes, den EUKLID um 300 v. Chr. in seinen „Elementen" (I 47) beschrieb, hat immer wieder zu lebhaften Einwendungen geführt. So spricht sich auch SCHOPENHAUER vehement gegen diesen Euklidischen *Mausefallenbeweis* des pythagoreischen Lehrsatzes aus: *Des Eukleides stelzbeiniger, ja hinterlistiger Beweis verläßt uns beim Warum*[1].

Der Satz des Pythagoras gilt sowohl für rationale als auch für irrationale rechtwinklige Dreiecke in seiner bekannten Form

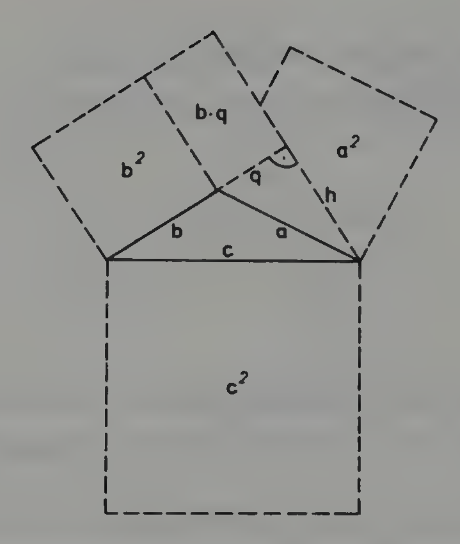
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Er läßt sich jedoch durch entsprechende Modifikation sowohl auf spitz- als auch auf stumpfwinklige Dreiecke erweitern:

$$a^2 \pm 2bq + b^2 = c^2$$

Ein Beispiel für das stumpfwinklige Dreieck[2] folgt auf der nächsten Seite.

1) A. Schopenhauer, Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, Leipzig 1891, 139.
2) Entnommen aus: Der große Rechenduden, 1. Band, Mannheim 1969, 176.



Das pythagoreische Dreieck 3–4–5 sowie die höheren pythagoreischen Zahlentripel sind Sonderfälle, in denen die Rationalität zum Ausdruck kommt und die deshalb in ihrer harmonikalen Beziehung zum Dreiklang wie überhaupt zu den verschiedenen Intervallen und Akkorden untersucht werden, um bestimmte Gesetzmäßigkeiten im harmonikalen Raum abzuleiten.

Es wird dabei zu zeigen sein, daß zum besseren Verständnis des pythagoreischen Lehrsatzes und seiner Umsetzung in die Dreidimensionalität noch weitere harmonikale Strukturelemente herangezogen werden müssen.

Gerade am Beispiel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 läßt sich erkennen, wie eine scheinbar eindeutige harmonikale Lösung sich als ein Irrweg herausstellt. Wäre dieses pythagoreische Dreieck für die harmonikale Untersuchung der verschiedenen Kristallkörper, wie sie in der Natur vorkommen, nicht so wichtig, könnte man dies einfach übergehen. Da es aber geradezu als ein *klassisches Beispiel der Harmonik* dargestellt wird, muß hier auch der Neuansatz beginnen. Dies schmälert keinesfalls die Verdienste der Harmonik, auf die auch die vorliegende Abhandlung aufbaut, sondern macht die enormen Schwierigkeiten klar, mit denen es jede harmonikale Untersuchung zu tun hat.

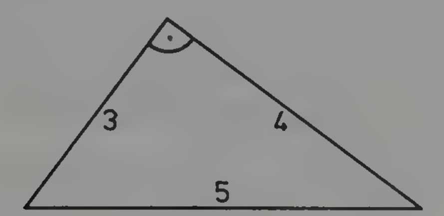
In dem Buch von Rudolf HAASE „Geschichte des harmonikalen Pythagoreismus" liest man, es sei

> *längst bekannt, daß der berühmte Lehrsatz des Pythagoras schon lange vor dessen Lebzeit existierte und sich in verschiedenen alten Kulturen nachweisen läßt. Zumindest unter Mathematikern weniger geläufig ist jedoch die Tatsache, daß der einfachste Fall eines rechtwinkligen Dreiecks, das den Lehrsatz ergibt, das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 (da die Summe der beiden Kathetenquadrate, 9 und 16, als Hypotenusenquadrat 25 ergibt), ein klassisches Beispiel der Harmonik ist; denn die Töne 3, 4 und 5 der Obertonreihe bilden den Dur-Dreiklang, und Saiten im Verhältnis 3:4:5*

ergeben den Moll-Dreiklang! Vielleicht ist es daher kein Zufall, daß dieser im Altertum weit verbreitete Lehrsatz ausgerechnet den Namen des Pythagoras trägt[1].

Es werden hier mit den Zahlen des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 über die Ober- und Untertonreihe Beziehungen zum Dur- und Molldreiklang hergestellt, die nur vordergründig bestehen und kausal so gar nicht abgeleitet werden können.

Ein rechtwinkliges Dreieck, das die Längenverhältnisse 3–4–5 hat, kann ich mir durchaus in der Form vorstellen, daß die Seiten durch Saiten ersetzt werden und dieses Dreieck so als ein *klingendes mathematisches Beispiel* herangezogen werden kann.



Bei den *klingenden Seiten* wird gleiche Dicke und gleiche Spannung vorausgesetzt, und nur ihre Länge unterscheidet sich im angegebenen Verhältnis.

Es ist selbstverständlich richtig, daß die Saiten 3–4–5, nacheinander zum Klingen gebracht, den Molldreiklang hervorbringen. Oder daß, wenn man jeweils zwei Saiten miteinander vergleicht, man drei Intervalle: die große Sext 3/5, die große Terz 4/5 und die Quarte 3/4 hört. An diesem Sachverhalt gibt es harmonikal nichts zu korrigieren, und doch fehlt hierfür eine Erklärung auf mathematischer Grundlage, die eine Beziehung zum *rechtwinkligen* Dreieck erkennen läßt.

Auch kann ich mir nicht vorstellen, wie man rein mathematisch das Theorem der *Quadratsaiten* mit dem pythagoreischen Lehrsatz in Einklang bringen soll, denn dieser geht geometrisch von den Seiten im Quadrat aus ($3^2 + 4^2 = 5^2$), während harmonikal nur die Saiten im Vergleich zueinander gehört werden.

Im übrigen wäre zu fragen, warum nur das erste und einfachste pythagore-

1) R. Haase, Geschichte des harmonikalen Pythagoreismus, Wien 1969, 17. Eine neuere Abhandlung zur Zahlentheorie geht beim „Pythagoras" ebenfalls auf „sinnliche Wahrnehmung" musikalischer Intervalle: *Als sinnliche Wahrnehmung stellen wir folgende Gleichung fest* $3^2 + 4^2 = 5^2$, *die auf Grund des schon lange vor Pythagoras (ca 580-500) bekannten Lehrsatzes eine wohlbekannte geometrische Interpretation hat. (Wem das als „sinnliche Wahrnehmung" nicht ausreicht, der möge sich davon überzeugen, daß die Teile einer in einem entsprechenden rechtwinkligen Dreieck gespannten Saite im Verhältnis Grundton : Quarte : Sexte gestimmt sind)* (W. Scharlau/H. Opolka, Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung, Berlin 1980, 2).

ische Dreieck 3–4–5 in der Harmonik, aber auch allgemein, eine so große Rolle spielt, die nächstfolgenden pythagoreischen Dreiecke dagegen

5–12–13

8–15–17

7–24–25

9–40–41 usw.

kaum oder keine Beachtung mehr finden. Immerhin geht die allgemeine Formel zur Bildung pythagoreischer Zahlen auf PYTHAGORAS und PLATON, eventuell auch schon auf frühere Zeiten zurück[1].

Betrachtet man die höheren pythagoreischen Zahlentripel vom musiktheoretischen Standpunkt aus, so wird verständlich, warum man davor zurückschreckt, diese harmonikal zu interpretieren. Eine Zuordnung über die Ober- und Untertonreihe, wie dies beim pythagoreischen Dreieck 3–4–5 der Fall war, ließe nur dissonante Akkorde entstehen.

Geht man nun der Frage nach, wie die Musiktheorie stereometrisch einen Dreiklang beschreibt – es handelt sich schließlich bei jedem Ton um ein dreidimensionales Gebilde, einen *Tonkörper* –, so ergibt sich die erstaunliche Tatsache, daß darüber kaum Literatur zu finden ist. Immerhin zählt der Dreiklang zu den Grundlagen der europäischen Musiktheorie.

Außer dem Dur- und Molldreiklang, dem die Primzahlen 2, 3 und 5 zugrundeliegen und der in die diatonische und reine Stimmung gehört, gibt es noch den pythagoreischen Dreiklang mit der charakteristischen pythagoreischen Terz 64/81und schließlich auch den temperierten Dreiklang, der hier aber wegen seiner Irrationalität ausscheidet.

Aus den zahlreichen musiktheoretischen Untersuchungen, die es zum Thema „Dreiklang" gibt, möchte ich die von Max PLANCK[2] besonders hervorheben. Einmal wegen der besonderen Qualität seiner Untersuchungen an einem Tasteninstrument, das die Bewertung der verschiedenen Dreiklänge erlaubt, und zum andern, weil sich hier ein Naturwissenschaftler mit dieser Problematik auseinandersetzt, ohne sich allerdings der Frage bewußt zu sein, wie man sich mathematisch und physikalisch einen Dreiklang in einem Tonraum vorstellen könnte.

Dabei ist es unbedingt nötig, die Frage nach dem strukturellen und stereometrischen Hintergrund eines Dreiklangs, überhaupt jedes Akkordes zu klären. Sie ist nicht nur in der Musiktheorie/Harmonik, sondern auch in der Geo-

1) O. Becker, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1966², 53.
2) M. Planck, Die natürliche Stimmung in der Vokalmusik, in: Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 9, 1893, 418ff; ders., Ein neues Harmonium in natürlicher Stimmung nach dem System von C. Eitz, in: Annalen der Physik und Chemie 48, 1893, 8ff.

metrie/Stereometrie gestellt. Eine Antwort auf diese Frage wurde von einem Fach aus versucht, von dem sie wohl am wenigsten zu erwarten war. Es war der bekannte Kristallograph und Mineraloge Victor GOLDSCHMIDT, der eine Musiktheorie entwickelte, in der der Dreiklang und andere Akkorde ihren strukturellen Hintergrund in den Kristallkörpern haben. Wie noch gezeigt werden wird, hat sie zweifellos ihre Schwächen, und dies ist wahrscheinlich mit der Grund, daß sie offiziell keinen Eingang in die Musiktheorie gefunden hat und so mit der Zeit in Vergessenheit geriet. Doch schmälert dies keineswegs Goldschmidts Verdienst um die Idee, die in seiner *harmonischen Komplikation* enthalten ist.

Das *Gesetz der Komplikation* war für Victor Goldschmidt Ausgangspunkt einer echten naturphilosophischen Betrachtung, die in der Kristallographie ihren Ausgang nahm und weite Teile der Wissenschaft: die Farbentheorie, die Physik der Spektrallinien und vor allem die Astronomie mit einbezog. So wird verständlich, daß eine Abhandlung über die harmonikale Komplementarität sich auch mit der Idee der harmonischen Komplikation auseinandersetzen muß. Beide haben den gleichen harmonikalen und geometrischen Hintergrund, die Kristalle, und das gleiche Ziel: *Materialien zu einer Musiklehre* zu liefern, die die Natur zum Vorbild hat.

Im Vorwort seines Buches „Materialien zur Musiklehre" schreibt Goldschmidt:

> *Es mag auffallen, daß ein Nichtmusiker sich getraut, über Musiklehre zu schreiben. Wenn ich es trotzdem wage, mit solchen Versuchen hervorzutreten, so geschieht es in der Überzeugung, daß ein Musiker schwerlich den hier eingeschlagenen Weg betreten hätte*[1].

Es ist dies die gleiche Schwierigkeit, vor der auch ich stehe.

Ich möchte mit einem Zitat aus dem „Lehrbuch der Harmonik" von Hans KAYSER die Problematik um den Dreiklang abschließen:

> *Wer einmal einen Blick in den großen Atlas der Indices der Kristallformen von V. Goldschmidt getan hat und die Tausende von Zahlen harmonikal prüft, der wird sehen, daß hier aus dem Prototyp des Akkordes, seinen Intervallen und Weiterentwicklungen zu oft vieltönigen komplizierten Gebilden uns die „Harmonielehre" einer Kristallmusik entgegentönt, der gegenüber unsere musikalische Harmonielehre mehr als primitiv anmutet*[2].

Es ergeben sich zur vorliegenden Thematik folgende Fragen:

1) Welche musikalischen Intervalle lassen sich dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 zuordnen?
2) Wie kann ich allgemein ein zweidimensionales geometrisches Gebilde wie das der pythagoreischen Dreiecke in einen harmonikalen Raum umwandeln

1) V. Goldschmidt, Materialien zur Musiklehre, Band 1, Heidelberg 1923, 1.
2) H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 267.

(und umgekehrt), und gibt es dafür allgemeingültige Regeln?
3) Wie lassen sich Dur- und Molldreiklänge und andere Akkorde in diesem dreidimensionalen Raum darstellen?
4) Läßt sich innerhalb des harmonikalen Raums ein prinzipielles Ordnungssystem erkennen?
5) Welche Rolle spielt dabei die harmonikale Komplementarität?

Diese Fragen sollen der rote Faden sein, der sich durch die gesamte Abhandlung ziehen wird.

Zur Beantwortung dieser Fragen ist die sukzessive Darstellung und Entwicklung der Intervalle und Akkorde über die pythagoreischen Zahlendreiecke in einem harmonikal strukturierten Raum notwendig. Das erste und bekannteste Beispiel für die pythagoreischen Zahlentripel (3–4–5) spielt dabei eine dominierende Rolle; es müssen jedoch gerade für die stereometrische und harmonikale Ableitung des Dreiklangs auch die nachfolgenden pythagoreischen Zahlendreiecke mit herangezogen werden. Es bilden also die pythagoreischen Dreiecke oder Zahlentripel

3–4–5

5–12–13

8–15–17

in dem vorliegenden Rahmen der harmonikalen Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes den Einstieg in eine *Morphologie der Intervalle und der Akkorde*, aber auch der *Dur- und Moll-Polarität*, als einem dualistischen Prinzip der Komplementarität.

Diese hier zunächst vorgestellte These scheint auf den ersten Blick nicht diskutabel zu sein, da mit den Zahlen 13 und 17 Primzahlen ins Spiel kommen, die in der Musiktheorie keine Rolle spielen und allenfalls über die Ober- und Untertonreihe harmonikal interpretiert werden können.

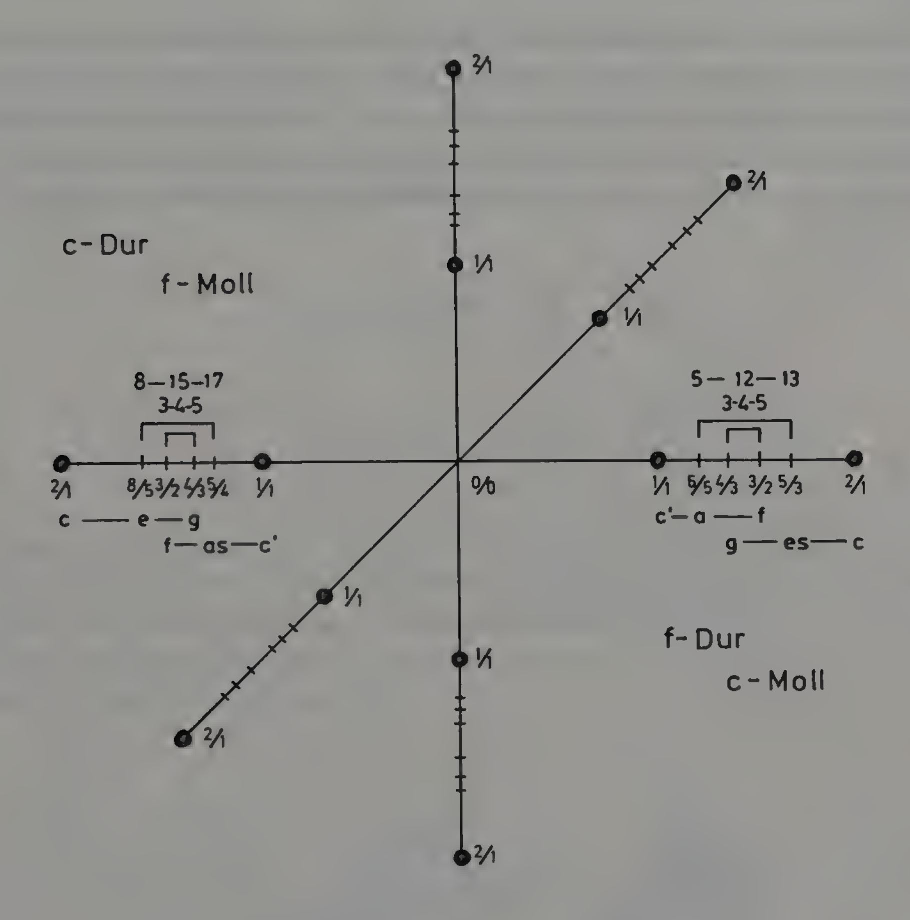
Es lassen sich jedoch die relativ hohen Zahlen in den pythagoreischen Zahlentripeln innerhalb eines harmonikalen Raumes in wesentlich einfachere Zahlen von Intervallen umwandeln. Dieses mathematische Prinzip der Umformung der pythagoreischen Dreiecke wird im folgenden noch ausführlich an stereometrischen Beispielen erläutert werden. So ergeben die drei angeführten Beispiele (3–4–5, 5–12–13, 8–15–17) nach ihrer harmonikalen Transformierung die diesen rationalen Dreiecken entsprechenden Intervallpaare:

Quinte	3/2	3–4–5	4/3	Quarte
große Sext	5/3	5–12–13	6/5	kleine Terz
kleine Sext	8/5	8–15–17	5/4	große Terz

Diese Intervalle bilden nicht nur die Grundlage sowohl eines Dur- als auch

eines Molldreiklangs, sondern haben in den pythagoreischen Zahlentripeln den mathematischen Hintergrund.

Es sind die rationalen rechtwinkligen Dreiecke, die die Grundlage der Intervalle und prinzipiell aller harmonikalen Verhältnisse bilden, aus denen sich – nach bestimmten mathematischen Mustern – die verschiedensten Akkorde entwickeln lassen. Zum vorliegenden Thema und der Frage nach dem stereometrischen Aufbau eines Dreiklangs – schließlich ist jeder Ton ein Raumphänomen – werden die entsprechenden Intervalle auf das Achsenkreuz eines Tonraums übertragen.



Innerhalb des Oktavenraumes von c nach c' bilden die Dreiklänge c-Dur (c–e–g) und f-Moll (f–as–c'), die sich beide aus den gleichen pythagoreischen Dreiecken 3–4–5 und 8–15–17 entwickeln lassen, eine komplementäre Einheit.

Auch die Dreiklänge c-Moll (c–es–g) und f-Dur (f–a–c'), die an die pythagoreischen Dreiecke 3–4–5 und 5–12–13 gebunden sind, erweisen sich inner-

halb der Oktave c–c' als komplementär.

Das dualistische Prinzip eines Dur- und eines Molldreiklangs, das sich aus der mathematischen Teilung des Oktavenraums ergibt und an die gleichen pythagoreischen Zahlentripel gebunden ist, stellt ein wichtiges Element der harmonikalen Komplementarität dar.

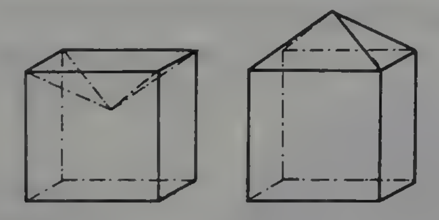
Hieran wird deutlich, daß dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 in seiner Beziehung zum Dreiklang eine grundlegend andere harmonikale Bedeutung zukommt, als auf Seite 17 zitiert wurde. Die Idee des Dreiklangs allein mit dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 in Verbindung zu bringen, gehört zu den Fällen des zufälligen Zusammentreffens, wie sie bei niedrigen Zahlen häufig anfallen.

Das erste und bekannteste Tripel 3–4–5 bildet nur den Anfang einer sich immer mehr differenzierenden Reihe von weiteren pythagoreischen Zahlen. Die dreidimensionale Darstellung von Intervallen innerhalb eines harmonikalstrukturierten Raumes ist ein wesentliches Gestaltungsprinzip, das sich auch in der Natur an den Kristallkörpern in vielfältiger Form nachweisen läßt.

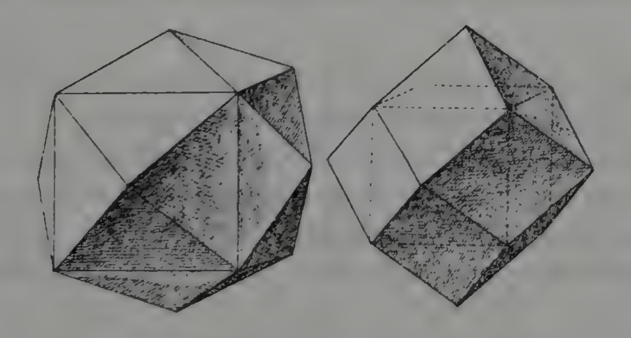
DIE HARMONIKALE UMWANDLUNG DES PYTHAGOREISCHEN DREIECKS 3–4–5 IN DEN OKTAVENRAUM

Zu den einfachsten Körpern der Mathematik zählt zweifellos der Würfel. Er soll hier als Ausgangs- und Grundkörper für einen Einstieg in die harmonikale Stereometrie dienen.

Es gibt mathematisch zwei Möglichkeiten, dem Würfel *Tiefe* bzw. *Höhe* zu geben und ihn in seiner Räumlichkeit zu verändern.

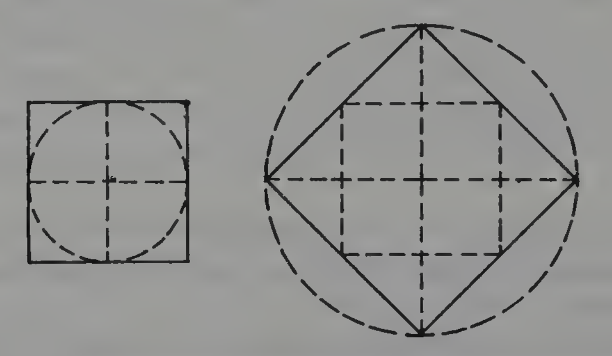


Beide Polyeder[1] sind in ihren Flächen und Winkeln kongruent, jedoch räumlich verschieden. Sie unterscheiden sich nur in ihrem Verhältnis zum Mittelpunkt des Würfels. Vervollständigen wir den zweiten Körper, indem wir weitere Pyramiden aufsetzen, so entsteht je nach Höhe bzw. *Tiefe* ein Pyramidenwürfel oder ein Rhombendodekaeder[2].

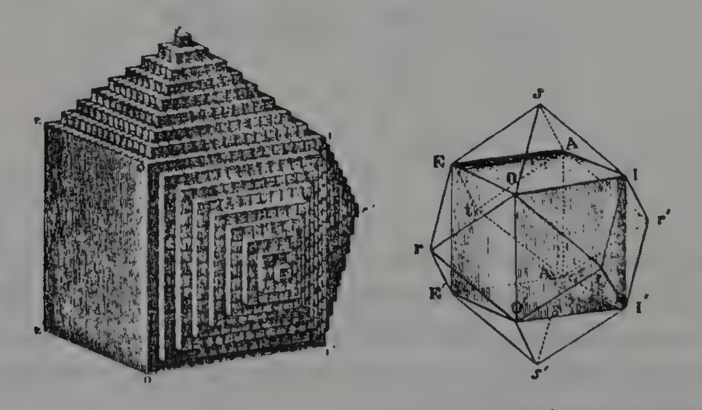


1) E. Steinitz, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934, 58.
2) M. Brückner, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Leipzig 1900, Tafel VII.

Wir setzen also an den Anfang einer harmonikalen Untersuchung den Würfel oder aus Gründen der leichteren zeichnerischen Darstellbarkeit das Quadrat. In dieses Quadrat zeichnen wir das Achsenkreuz und den Inkreis ein. Durch Verdopplung des Radius bzw. des Achsenkreuzes und Verbindung der Eckpunkte entsteht zweidimensional ein neues Quadrat mit der doppelten Fläche.



Setzt man den gleichen Vorgang ins Dreidimensionale um, entsteht aus dem Würfel ein Dodekaeder mit dem doppelten Volumen.



Aufbau des Rhombendodekaeders aus würfelförmigen Molekülen nach Haüy[1]

Das Dodekaeder besteht in diesem Fall aus zwölf Rhomben und wird deshalb mathematisch auch als Rhombendodekaeder bezeichnet.

Man kann dieses Dodekaeder auch als Grenzfall eines Pyramidenwürfels bezeichnen, bei dem zwei Pyramidenseiten in eine Rhombenfläche übergehen, wie dies aus den Zeichnungen ersichtlich ist.

Es liegen also zwei Grenzpunkte fest – der Würfel und das Rhombendodekaeder –, die sich

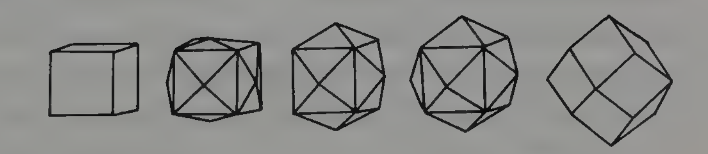
1) R.-J. Haüy, Handbuch der Physik für den Elementarunterricht, übers. von Ch. S. Weiss, Leipzig 1805; Abbildung nach J. Beckenkamp, Statische und kinetische Kristalltheorien, 1. Teil, Berlin 1913, 34.

– im Achsenkreuz bzw. in ihren Radien (eindimensional),
– in der Fläche der beiden Quadrate (zweidimensional),
– in ihrem Volumen zueinander wie 1:2 verhalten.

Es ist nun interessant, festzustellen, daß es nicht möglich ist, über das doppelte Verhältnis des Achsenkreuzes hinaus den Würfel so weit auszudehnen, daß ein „harmonikal sinnvoller“ Körper entsteht.



Prinzipiell ist es möglich, zwischen den beiden Endpunkten von Würfel und Rhombendodekaeder jedes rationale und irrationale Verhältnis herzustellen. Doch können nur Pyramidenwürfel mit einfachen rationalen Proportionen in einen harmonikalen Vergleich gesetzt werden. Es werden zunächst folgende Pyramidenwürfel[1] als Beispiele gewählt:



	Würfel	Pyramidenwürfel			Dodekaeder
harmonikales Verhältnis zum Würfel:	1/1	5/4	3/2	7/4	2/1
Kristall-Indizes nach Miller:	[100]	[410]	[210]	[430]	[110]
Kristall-Indizes nach Goldschmidt:	0	$0\frac{1}{4}$	$0\frac{1}{2}$	$0\frac{3}{4}$	01

Es wurden hier die kristallographischen Bezeichnungen der angeführten Kristallkörper ohne detaillierte Erläuterung in der heute üblichen Form nach MIL-

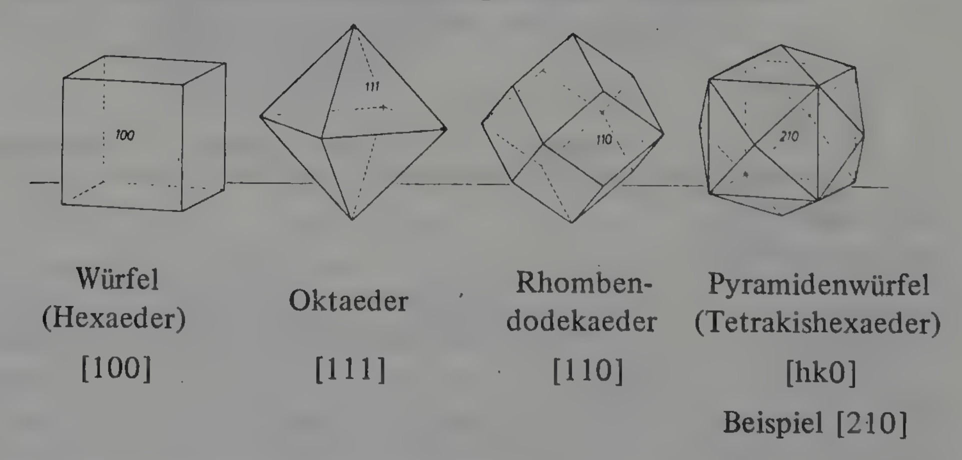
1) E. Fischer, Einführung in die geometrische Kristallographie, Berlin 1955, 162.

LER und zusätzlich nach GOLDSCHMIDT sowie in der harmonikalen Form vorgestellt, um zunächst den strukturellen zahlenorientierten Unterschied zu zeigen.

Bevor jedoch auf die harmonikale Interpretation dieser Kristallkörper und ihre mathematische Ableitung eingegangen werden kann, soll auf die heute allgemein gültige kristallographische Beschreibung hingewiesen werden. Es wird dabei auf ein modernes Standardwerk der Kristallographie und Mineralogie[1] zurückgegriffen, das besonders im deutschsprachigen Raum mit an oberster Stelle steht. Zum Zwecke der einfacheren Darstellung gibt die Seite 83 das kubische Kristallsystem wieder, da es die wichtigsten Grundformen enthält, die für einen harmonikalen Einstieg in die Thematik der Kristallkörper von besonderem Interesse sind. Außerdem sind zahlreiche Mineralien in diese Kristallklasse eingeordnet, die von ihren Bezeichnungen her auch dem Nichtfachmann bekannt sind, zumal sie in der Natur recht häufig vorkommen. Man bekommt im Verlauf dieser mathematisch-kristallographischen Behandlung ein ungefähres Bild von den vielfältigen Kombinationsmöglichkeiten, die sich aus wenigen Grundformen ergeben können.

Gerade eine solche Darstellung soll den Vergleich einer kristallographischen mit einer harmonikalen Untersuchungsmethode erleichtern. Auch werden die Schwierigkeiten deutlich, die einer vollständigen und abschließenden Bewertung eines solchen harmonikalen Vorgehens noch im Wege stehen.

Aus dem kubischen oder regulären Kristallsystem werden hier vier einfach strukturierte Körper herausgegriffen, die sich auch leicht mathematisch berechnen lassen. Sie werden mit ihren kristallographischen Indizes angegeben, da sich mit diesen Zahlen ein Kristallkörper exakt definieren läßt.



Würfel (Hexaeder)	Oktaeder	Rhomben-dodekaeder	Pyramidenwürfel (Tetrakishexaeder)
[100]	[111]	[110]	[hk0]
			Beispiel [210]

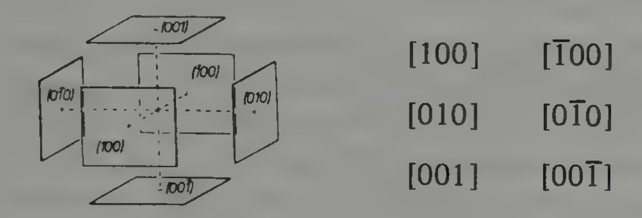
Ihre kristallographische Beschreibung[2] erfolgt in der heute allgemein üblichen Form der Millerschen Indizes, indem diese Körper über die Projektion

1) P. Ramdohr und H. Strunz, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, Stuttgart 1967[15].
2) Ebenda, 35.

ihrer Flächen auf das Achsenkreuz bestimmt sind.

a) Hexaeder (Würfel), [100]. Jede Fläche schneidet nur eine Achse und läuft den beiden anderen parallel: 6 Flächen.
b) Oktaeder, [111]. Jede Fläche schneidet alle drei Achsen in gleichem Abstand; die Zahl der Flächen ist acht.
c) Rhombendodekaeder (Dodekaeder, Granatoeder), [110]. Jede Fläche schneidet zwei Achsen in gleichem Abstand und läuft der dritten parallel: 12 Flächen.
d) Tetrakishexaeder (Pyramidenwürfel), [hk0]. Jede Fläche schneidet zwei Achsen in verschiedenem Abstand, der dritten Achse läuft sie parallel: 24 Flächen.

Der Würfel stellt die einfachste kristallographische Grundform dar, was sich schon in den Zahlen des Kristallindexes ausdrückt: [100]. Er setzt sich aus 6 Flächen zusammen, die, auf das Achsenkreuz projiziert, die entsprechenden Kristallindizes ergeben[1].

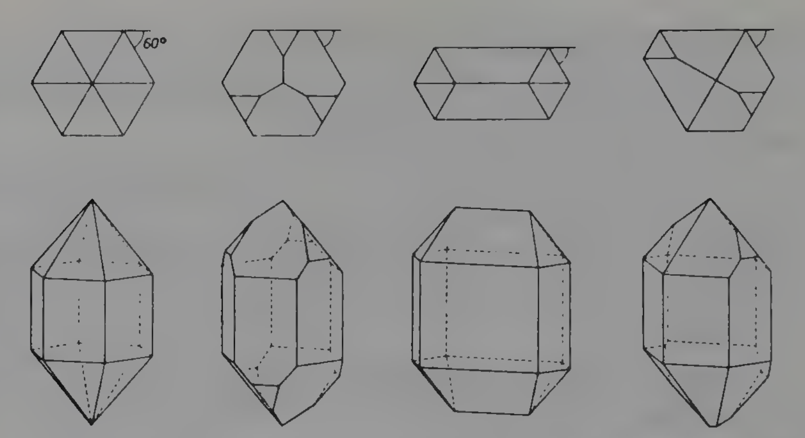


Dieses auf den ersten Blick etwas kompliziert erscheinende kristallographische Prinzip der Projektion der Flächen auf das Achsenkreuz hat den großen Vorteil, daß es sich auf alle Kristallkörper in den verschiedenen Klassen anwenden läßt, wobei sich allgemein nur *einfache rationale* Zahlen ergeben. Diese Zahlen können jedoch noch nicht in einen harmonikalen Vergleich gebracht werden, sondern müssen, wie dies im folgenden gezeigt werden wird, entsprechend umgewandelt werden.

Für den morphologischen Aufbau der Kristalle sind vor allem zwei Gesetze von besonderer Wichtigkeit, die hier vorgestellt werden müssen.

Das *Gesetz der Winkelkonstanz*, das auf Nikolaus STENO (1669) zurückgeht, besagt: *Alle zu derselben Kristallart gehörenden Einzelkristalle schließen zwischen analogen Flächen – gleichen Druck, gleiche Temperatur und chemische Zusammensetzung vorausgesetzt – stets gleiche Winkel ein*[2]. Es bedeutet, daß die Winkel zwischen zwei analogen Flächen immer gleich sind, auch wenn das Wachstum eines Kristalls zu einer „Verzerrung" des Grundkörpers geführt hat.

1) Ramdohr/Strunz, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, 21.
2) Ebenda, 17.



Kopfbilder und Parallelprojektionen von Quarzkristallen[1]

Das *Rationalitätsgesetz*, das zuerst von Christian Samuel WEISS (1809) formuliert wurde, hat folgenden Inhalt: *Hat man aus morphologischen Winkelmessungen oder aus den Gitterkonstanten einer Kristallart deren Kristallelemente (das Achsenkreuz) abgeleitet, so lassen sich alle an den Einzelkristallen dieser Kristallart beobachtbaren Flächen und Kanten im Verhältnis einfacher ganzer Zahlen (rationaler Zahlen) auf das gefundene Achsenkreuz beziehen. Lediglich Abwandlungen des Rationalitätsgesetzes sind das „Zonenverbandsgesetz“* (WEISS 1820) *und das „Komplikationsgesetz“* (Victor GOLDSCHMIDT 1901). *Ersteres besagt, daß sämtliche Flächen einer Kristallart im Zonenverband stehen, d. h. daß sich aus wenigen Ausgangsflächen sämtliche Flächen und Kanten (Zonen) eines Kristalles deduzieren lassen. Letzteres besagt: Aus zwei Flächen* ($h_1 k_1 l_1$), ($h_2 k_2 l_2$) *erhält man gemäß der Zonengleichung durch Addition der Indizes oder ihrer Vielfachen stets neue Flächen* ($h_1 + h_2$, $k_1 + k_2$, $l_1 + l_2$), *die mit den ursprünglichen in der gleichen Zone liegen; durch Fortsetzung dieses Verfahrens lassen sich sämtliche Flächen eines Zonenverbandes aus zwei ihm angehörenden Flächen ableiten usw.*[2]

Die relativen Abstandsverhältnisse innerhalb des Achsenkreuzes liegen in der reziproken Form vor und werden durch Multiplikation des gemeinsamen Nenners in die Millerschen Indizes umgewandelt. Das nachfolgende Beispiel soll diesen schwierigen Sachverhalt etwas verdeutlichen:

1) Ramdohr/Strunz, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, 16.
2) Ebenda, 24.

Umrechnung der Koeffizientenbezeichnung nach Weiss in Millersche Indizes[1]

WEISSsche Koeffizienten	reziproke Werte	MILLERsche Indizes
1 · a : 1 · b : ∞ · c	1/1 : 1/1 : 1/∞	[110]
∞ · a : 1 · b : 1 · c	1/∞ : 1/1 : 1/1	[011]
∞ · a : ∞ · b : 1 · c	1/∞ : 1/0 : 1/1	[001]
∞ · a : 1 · b : 2 · c	1/∞ : 1/1 : 1/2	[021]
2 · a : 3 · b : 1 · c	1/2 : 1/3 : 1/1	[326]
2 · a : 3 · b : 4 · c	1/2 : 1/3 : 1/4	[643]

Das *Zonenverbandsgesetz* behandelt allgemein eine Zonenreihe von strukturell ähnlichen Körpern, die sich zwischen zwei Endkörpern darstellen lassen. Diese bilden die äußeren Grenzpunkte, innerhalb derer theoretisch eine unbegrenzte Zahl von Zwischenkörpern denkbar ist. Im allgemeinen ist die Anzahl der Zwischenglieder allerdings nicht sehr hoch, da die Einfachheit der Zahlen in den Kristallindizes für die Rangordnung innerhalb einer Zonenreihe bestimmend ist.

Das *Komplikationsgesetz* geht von den Kristallindizes aus, die durch Addition ihrer Einzelwerte oder auch ihrer Vielfachen zur Erklärung neuer Kristallflächen herangezogen werden.

Beispiele für die Kristallindizes [hk0], wenn $h > k$:

[210]   [110]   [210]   [310]

[320]   [520]

Das *Komplikationsgesetz* geht in seinen Anfängen auf JUNGHANN[2] zurück, der im Jahre 1874 in einer damals nicht beachteten Abhandlung zeigte, daß man die innerhalb einer Zonenreihe auftretenden Flächen durch Addition der Millerschen Kristallindizes ableiten kann.

Victor GOLDSCHMIDT[3] kam dann unabhängig von Junghann im Jahre 1897 in seiner grundlegenden Abhandlung „Über Entwickelung der Krystallformen" auf das gleiche Gesetz, erweiterte die Idee der Komplikation in umfassender Form und dehnte sie auch auf andere Wissenszweige aus. Obwohl er zweifellos der erste war, der den harmonischen Hintergrund im Aufbau der Kristalle er-

1) Ramdohr/Strunz, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, 21.
2) G. Junghann, Ein einfaches Gesetz für die Entwicklung und die Gruppierung der Krystallzonen, in: Annalen der Physik 152, 1874, 68ff.
3) V. Goldschmidt, Über Entwickelung der Krystallformen, in: Zeitschrift für Kristallographie 28, 1897, 1-35, 414-451.

kannte, ist es ihm dennoch nicht gelungen, dies über das Komplikationsgesetz auf streng mathematischer Grundlage zu beweisen.

Während die Gesetze der Winkelkonstanz und der Rationalität der Kristallindizes in der Kristallographie unumstritten sind, gilt dies keineswegs für das Komplikationsgesetz. In zahlreichen modernen kristallographischen Fachbüchern[1] wird dieses Gesetz nicht einmal erwähnt. Dies hängt in der Hauptsache mit seinem empirischen Charakter zusammen, da es bis heute für dieses Komplikationsgesetz keine mathematische Ableitung gibt. Darauf hat insbesondere schon BUERGER[2] hingewiesen, indem er schreibt: *The law of complication, advanced by Goldschmidt, rests on an empirical basis.*

Die Problematik, die sich am Komplikationsgesetz ergibt, soll im nächsten Kapitel weiterverfolgt werden, da zu seiner Bewertung erst noch das Prinzip der harmonikalen Komplementarität ausführlich entwickelt werden muß.

Die wesentlichen Grundlagen, die zur Beschreibung eines Kristallkörpers notwendig sind, wären damit vorgestellt. Es ist dennoch nicht möglich, alle Aspekte so ausführlich zu behandeln, wie dies in den kristallographischen Fachbüchern geschieht. Auch hätte man durchaus noch das *Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse*[3] heranziehen können, da hier der Begriff des Harmonischen eine Rolle spielt. Da aber dieses Doppelverhältnis in den heutigen Fachbüchern nur selten erwähnt wird, soll es hier ausgeklammert werden.

Um das Thema in einfacher und überschaubarer Form zu halten, so daß es auch für einen an harmonikalen Dingen Interessierten und Nichtkristallographen verständlich und zugänglich bleibt, wird auf die einfachste kristallographische Zonenreihe zurückgegriffen, die zwischen den beiden Endkörpern Würfel und Rhombendodekaeder die verschiedensten Pyramidenwürfel ausbildet. Das rechtwinklige Achsenkreuz bildet die Grundlage sowohl für die kristallographische als auch für die harmonikale Betrachtung. Gerade diese Zonenreihe Würfel–Pyramidenwürfel–Rhombendodekaeder ist für die vorliegende Untersuchung sehr gut geeignet, da die mathematischen Zusammenhänge sich an diesen Körpern leicht ableiten lassen. Auf Grund ihrer einfachen Struktur lassen sie sich auch in Modellen leicht nachvollziehen, weil außer dem Würfel als Grundkörper nur noch die aufgesetzten quadratischen Pyramiden hinzukommen. Da diese Körper in der Kristallographie durch ihre Winkelbeziehungen ausführlich beschrieben und durch ihre Kristallindizes definiert sind, liegen ideale Voraussetzungen für eine harmonikale Untersuchung vor. Auch ist es nicht nötig, alle diese Kristallkörper in der Natur selbst zu suchen, da in der Fachliteratur die gewünschten Angaben vorliegen. So ist es völlig ausreichend,

1) H. J. Buerger, Kristallographie, Berlin 1977; S. Haussühl, Kristallgeometrie, Weinheim 1977.
2) H. J. Buerger, The law of complication, in: The American Mineralogist 21, 1936, 702-714.
3) Th. Liebisch, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881, 37.

sich an einigen wenigen Exemplaren den stereometrischen und harmonikalen Zusammenhang zu verdeutlichen.

Es soll deshalb versucht werden, über die einfachsten Körper des kubischen Kristallsystems in die *harmonikale Stereometrie* einzusteigen.

Von den vielfältigen Möglichkeiten, die sich am Beispiel der verschiedenen kristallinen Pyramidenwürfel [hk0] ergeben, soll der Pyramidenwürfel mit der kristallographischen Bezeichnung [210] ausführlicher beschrieben werden, da an ihm das pythagoreische Dreieck 3–4–5 in so eindeutiger Form nachgewiesen werden kann wie an keinem anderen mathematischen Körper und er deshalb für eine harmonikale Untersuchung ideal ist.

Die kristallographische Bezeichnung für den Pyramidenwürfel mit dem Kristallindex [210] bedeutet entsprechend der vorgegebenen Definition, daß jede Dreiecksfläche (210) eine Achse im Abstand 1/1 und eine weitere Achse im Abstand 1/2 vom Mittelpunkt des Achsenkreuzes schneidet und der dritten Achse parallel läuft. Mathematisch ausgedrückt, liegen demnach am Achsenkreuz die folgenden Verhältnisse vor:

$$1/1 \qquad 1/2 \qquad 1/\infty \qquad\qquad | \times 2$$

Indem man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner 2 diese Brüche zu ganzen Zahlen macht, entstehen die bereits erwähnten Millerschen Indizes

$$2 \qquad 1 \qquad 0\,.$$

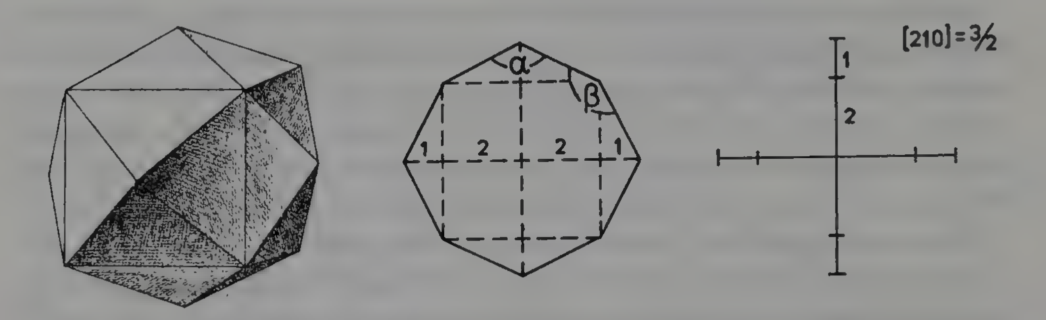
Die rechnerische Projektion kann man nun für jede der 24 Dreiecksflächen des Pyramidenwürfels durchführen, wobei sich jeweils die Zahlen der Indizes vertauschen, z. B. (120), (021), (012). Es ergibt sich nur eine andere Betrachtungsweise, der mathematische Inhalt bleibt jedoch der gleiche.

Es werden also bei der kristallographischen Untersuchungsmethode die jeweiligen Flächen eines Kristallkörpers auf die Achsen projiziert, sowie die rationalen Abstandsverhältnisse auf dem Achsenkreuz berechnet und in eine entsprechende Zahlenbeziehung gebracht.

Die kristallographische Bezeichnungsweise Victor GOLDSCHMIDTs ist von ihrem mathematischen Inhalt her ähnlich, nur ist ihre Schreibweise von der Millerschen verschieden.

Das Eindringen in eine harmonikale Untersuchungsmethode ist demgegenüber vollkommen anders. Hier geht es um das Verhältnis zweier Körper, in diesem Fall das Verhältnis zwischen Pyramidenwürfel und dem eingeschriebenen Würfel, und um deren Beziehung zum Achsenkreuz. Der Würfel schneidet das Achsenkreuz des Pyramidenwürfels im Verhältnis 2:1. Diese Interpretation der Kristallindizes am Pyramidenwürfel [210] ist abweichend von der in der Kristallographie üblichen, der strukturelle Sachverhalt bleibt jedoch der gleiche. Das Verhältnis 2:1, das hier am Achsenkreuz auftritt, kann leicht in eine harmonikale Proportion umgewandelt werden. Dies geschieht, indem die beiden

Zahlengrößen 1 und 2, wie dies aus den folgenden Abbildungen hervorgeht, in Beziehung zum Achsenmittelpunkt gesetzt werden und so das harmonikale Verhältnis der Quinte 3:2 ergeben[1].

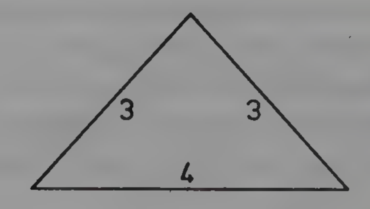


Das Verhältnis 1:2, in dem hier die Achse geteilt wird, ist noch keine harmonikale Proportion, da die Zahlen 1 und 2 nur die Grundlage für die Indizierung dieses Pyramidenwürfels [210] bilden und erst noch harmonikal umgewandelt werden müssen.

Wie man leicht erkennen kann, liegen mit dem Kristallindex [210] und dem harmonikalen Verhältnis 3/2 (Quinte) zwei völlig verschiedene Ebenen struktureller Zahlenqualitäten vor.

Nach dieser kurzen Erklärung des Kristallindexes des Pyramidenwürfels [210] auf kristallographischer und harmonikaler Basis soll nun die Untersuchung über seine Beziehung zum pythagoreischen Dreieck 3–4–5 aufgenommen werden.

Dieser Pyramidenwürfel [210] besteht aus 24 gleichschenkligen Dreiecken mit den Seitenlängen 3–4–3.

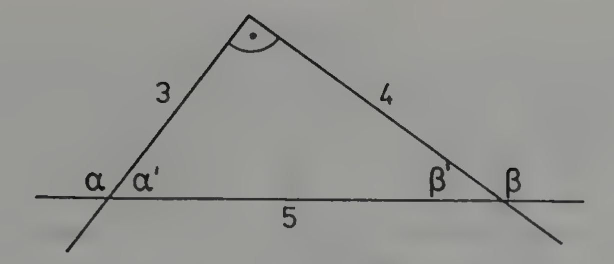


Die Winkel, die zwischen zwei angrenzenden Flächen gemessen werden, haben entweder den Wert

$$\alpha = 126^\circ 52' 12'' \quad \text{oder}$$
$$\beta = 143^\circ 7' 48''$$

und entsprechen damit den Außenwinkeln des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5.

1) M. Brückner, Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900, Tafel VII.



Mathematisch ausgedrückt, bedeutet das:

$$\alpha = 180^0 - \alpha' = 126^0 52' 12'' \qquad \cos \alpha' = 3/5$$

$$\beta = 180^0 - \beta' = 143^0 7' 48'' \qquad \cos \beta' = 4/5$$

Um diese beiden Winkel α und β an diesem Pyramidenwürfel zu bestimmen, ist nicht einmal ein Goniometer (Winkelmesser) mit genauer Gradeinteilung notwendig, sondern nur ein pythagoreisches Dreieck 3–4–5, dessen Katheten oder Hypotenuse entsprechend der obigen Figur verlängert sind.

Beide Winkel α und β dieses Pyramidenwürfels lassen sich noch weiter differenzieren.

1) Zwei in der Spitze gegenüberliegende Pyramidenflächen bilden in der Ebene des Achsenkreuzes den Winkel $\alpha = 126^0 52' 12''$ und dies insgesamt 12-mal.

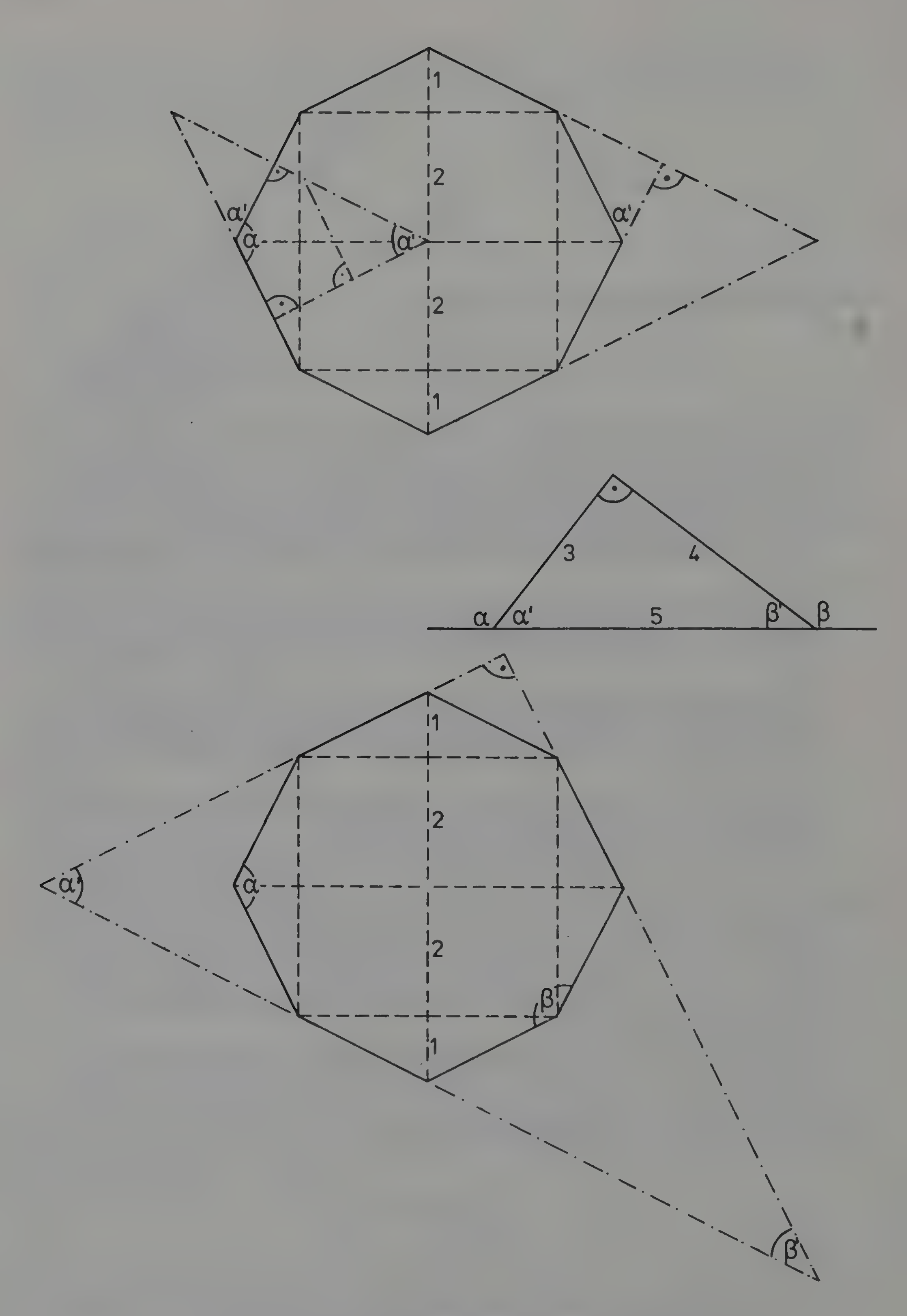
2) Zwei Pyramidenflächen, die an der Würfelkante/Pyramidengrundlinie zusammenkommen, bilden den Winkel $\beta = 143^0 7' 48''$. Dies ist ebenfalls 12-mal der Fall.

3) Der Winkel β, der sich zwischen zwei Pyramidenflächen an ihrer Seitenkante bildet, kommt am häufigsten vor (24mal).

Die unter 3) aufgeführten Winkel β lassen sich nicht in das Achsenschema (Abbildung auf Seite 32) einzeichnen, da sie nicht in der Achsenebene liegen.

Der Winkel α dagegen ist durch seine besondere Stellung zum Achsenkreuz ausgezeichnet. Er bildet die äußere Begrenzung innerhalb des rechtwinkligen Koordinatensystems und ist deshalb besonders für eine harmonikale Bewertung von großer Bedeutung.

Die beiden Winkel α und β lassen sich am gleichen Pyramidenwürfel noch auf eine andere Art darstellen. Wir greifen dabei auf den Schnitt durch den Körper innerhalb der Achsenebene zurück.

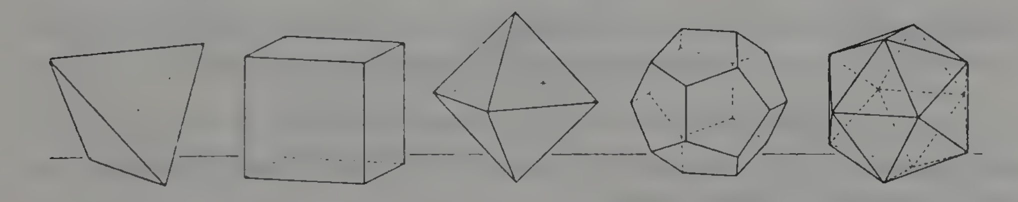


Schnitt durch die Achsenebene des Pyramidenwürfels [210]
und pythagoreisches Dreieck 3–4–5

Es ist hiermit möglich, alle drei Innenwinkel α', β' und $\gamma = 90^0$ des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 an diesem Pyramidenwürfel [210] sozusagen im dreidimensionalen Raum nachzuweisen. Man kann auf diese Weise nicht nur die Außen-, sondern auch die Innenwinkel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 zur Körperbestimmung heranziehen.

Dieser Pyramidenwürfel [210] ist damit der einzige Körper, dessen zwei Arten von Winkeln über je zwei angrenzenden Flächen ein und demselben pythagoreischen Dreieck 3–4–5 zugeordnet werden können.

Ein kurzer Vergleich mit den *Platonischen Körpern* macht den Unterschied deutlicher, da dort, außer beim Würfel, alle Winkel zwischen zwei angrenzenden Flächen einem Winkel eines rechtwinkligen nichtrationalen Dreiecks entsprechen.

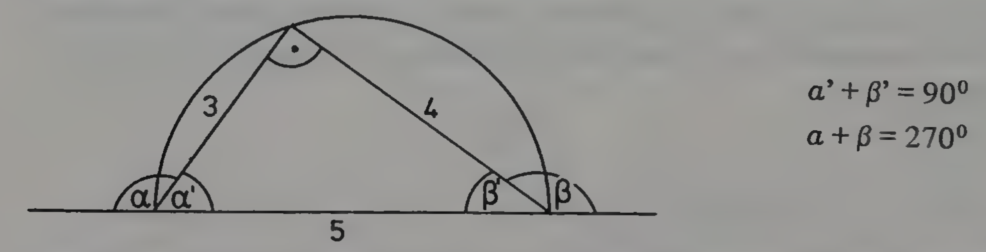


Die fünf regelmäßigen Platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Pentagondodekaeder und Ikosaeder (nach Ramdohr/Strunz, 31)

Platonischer Körper	Winkel α zwischen zwei angrenzenden Flächen	Winkelfunktion	rechtwinkliges Dreieck
Würfel	90^0	$\sin_\alpha = 1$	
Tetraeder	$180-\alpha = 70^0 31'44''$	$\cos_\alpha = 1/3$	$1-2\sqrt{2}-3$
Oktaeder	$180-\alpha = 109^0 28'16''$	$\cos_\alpha = -1/3$	$1-2\sqrt{2}-3$
Ikosaeder	$180-\alpha = 138^0 11'23''$	$\sin_\alpha = -2/3$	$2-\sqrt{5}-3$
Pentagon-dodekaeder	$180-\alpha = 116^0 33'54''$	$\mathrm{tg}_\alpha = -2$	$1-2-\sqrt{5}$

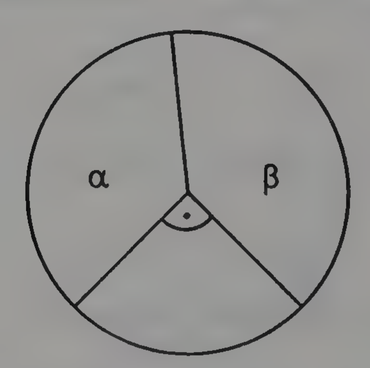
Von den 5 Platonischen Körpern[1] kommen der Würfel, das Tetraeder und das Oktaeder auch als Kristallkörper vor, während das Ikosaeder und das Pentagondodekaeder in der regelmäßigen Form kristallin nicht auftreten können.

Es muß hier ein Hinweis auf die Interpretation des geometrischen Begriffs *komplementär* eingefügt werden. Es ist in der Geometrie üblich, als Komplementwinkel diejenigen Winkel zu bezeichnen, die sich in einem rechtwinkligen Dreieck zu 90^0 ergänzen. Analog müssen auch die Außenwinkel, die sich zu 270^0 ergänzen, komplementär sein, da in beiden Fällen das gleiche rechtwinklige Dreieck als Grundlage dient.



Es ist klar, daß auch die Winkel α und α' sowie die Winkel β und β' sich gegenseitig ergänzen und bedingen; doch hat dies mit der *Komplementarität,* wie sie hier definiert ist, nichts zu tun[2].

Die beiden Winkel α und β stellen zwei verschiedenartige Winkelgrößen oder auch Qualitäten dar, die sich nicht nur gegenseitig bedingen – da der dritte Winkel 90^0 beträgt –, sondern zusammen mit ihm auch zur Einheit des Vollkreises „komplementär" ergänzen.



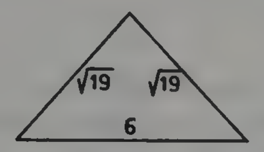
Die Außenwinkel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5
in ihrer Kreisbeziehung

Um die harmonikale Komplementarität abzuleiten, ist es jedoch grundsätzlich notwendig, daß sich zwei verschiedene Pyramidenwürfel in ihren Winkeln

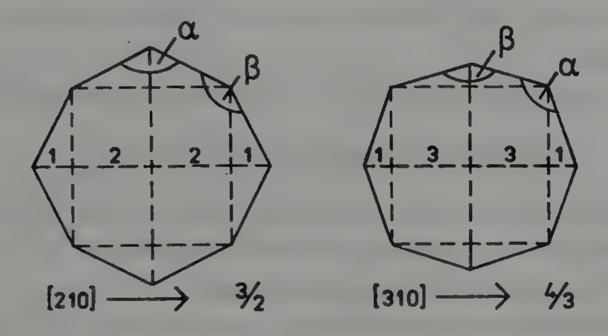
1) Weitere Angaben zu den *Platonischen Körpern* in: Der große Rechenduden, 1. Band, Mannheim 1969^3, 611.

2) Vgl. hierzu die Winkel von Oktaeder und Tetraeder in der Tabelle der Seite 35.

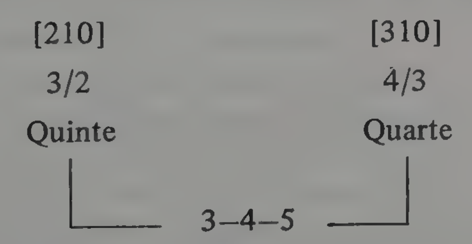
ergänzen. Am Beispiel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 gibt es außer dem schon ausführlich beschriebenen Pyramidenwürfel [210] noch einen zweiten Pyramidenwürfel [310], bei dem in der Achsenebene die gleichen Winkel vorkommen. Dieser besteht ebenfalls aus 24 gleichschenkligen Dreiecken mit den Maßen:



Beide Pyramidenwürfel, [210] und [310], haben je 12 Winkel α und 12 Winkel β gemeinsam, die sich nur in ihrer Beziehung zum Achsenkreuz unterscheiden, und sind folglich stereometrisch komplementär.



Setzen wir die jeweiligen Achsenabschnitte, die sich aus dem Teilungsverhältnis vom Pyramidenwürfel zum Würfel ergeben, in Beziehung zum Mittelpunkt, so ergeben sich die harmonikalen Werte



Man kann auch sagen: So wie sich zweidimensional am pythagoreischen Dreieck 3–4–5 und dreidimensional an den Pyramidenwürfeln [210] und [310] die beiden spitzen (stumpfen) Winkel komplementär zu 90° (270°) ergänzen, ergänzen sich harmonikal die beiden entsprechenden Intervalle, die Quinte und die Quarte, zur Oktave.

3^2	$+$	4^2	$=$	5^2		Pythagoreischer Lehrsatz:
$(\frac{3}{5})^2$	$+$	$(\frac{4}{5})^2$	$=$	1		„geometrisch"
Quinte	$\otimes$	Quarte	$=$	Oktave		Pythagoreischer Lehrsatz:
3/2	$\otimes$	4/3	$=$	2/1		„harmonikal"

Das harmonikale Prinzip, das sich hinter dieser Gleichung verbirgt, besteht darin, daß aus der „Verknüpfung" der beiden Intervalle Quinte und Quarte die Oktave entsteht. Diese „Verknüpfung" soll durch das Zeichen ⊗ besonders hervorgehoben werden, welches in unveränderter Form dem neu herausgegebenen Buch von Johannes TROPFKE „Geschichte der Elementarmathematik" entnommen ist[1]. Dieses Buch stellt sozusagen „den letzten Stand der Erkenntnis" auch für das vorliegende Thema dar.

Die Frage nach der Möglichkeit, diese „harmonikale Gleichung" mit dem pythagoreischen Lehrsatz der Geometrie zu verbinden, ist bisher offenbar nicht gestellt worden.

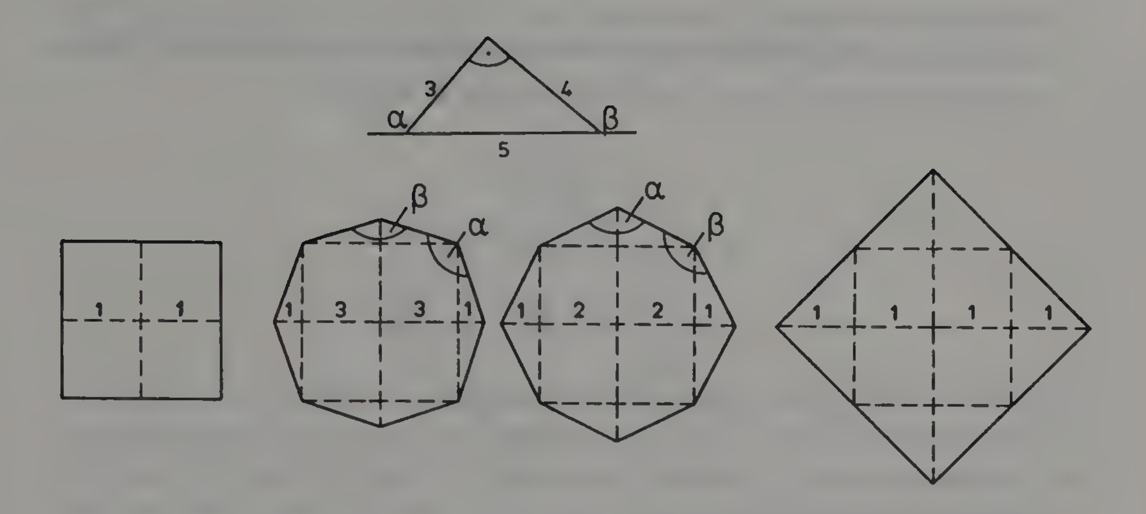
Kehren wir nun zur Ausgangsreihe zurück, in der die beiden Grenzkörper

Würfel – Rhombendodekaeder

die äußeren Grenzpunkte bilden, innerhalb derer die beiden Pyramidenwürfel [210] und [310] liegen, die im pythagoreischen Dreieck 3–4–5 ihren stereometrischen und harmonikalen Hintergrund haben.

Es genügt, zum Zwecke der einfacheren Darstellung auf die zweidimensionale Form zurückzugreifen, da in diesen Flächen gleichzeitig die Achsenschnitte der entsprechenden Körper dargestellt sind.

1) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Band 1: Arithmetik und Algebra, Berlin 1980^4, 325.



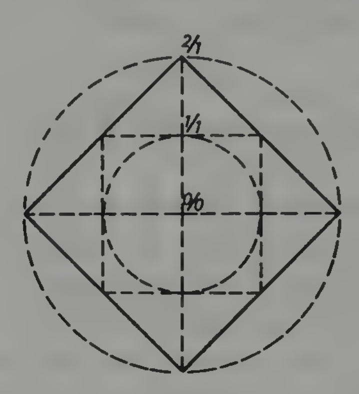
	Würfel	Pyramidenwürfel		Rhomben-dodekaeder
Kristallindex:	[100]	[310]	[210]	[110]
Linie	1/1	4/3	3/2	2/1
Fläche	1/1	4/3	3/2	2/1
Körper	1/1	4/3	3/2	2/1
	6	8	9	12
Intervall	Prim	Quarte	Quinte	Oktave

Dabei stellen die Winkel von 90⁰ und 180⁰ in den Grenzkörpern Würfel und Rhombendodekaeder die jeweiligen Grenzwinkel dar. Sie können keinem rechtwinkligen Dreieck zugeordnet werden, während die Außenwinkel α und β der Pyramidenwürfel [210] und [310] als Zwischenkörper dieser Zonenreihe dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 entsprechen.

Harmonikal ergeben sich hieraus die vier Grundintervalle Prim – Quarte – Quinte – Oktave. Dabei sind die Intervalle Quinte 3/2 und Quarte 4/3 ausschließlich aus dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 entwickelt worden.

Wie aus der Abbildung ebenfalls zu erkennen ist, läßt sich die gleiche proportionale Beziehung in den drei Dimensionen darstellen: Linie – Fläche – Körper, doch harmonikal ist nur die Dimension der Körper. Erst die harmonikale Umwandlung einer zweidimensionalen Figur in die Dreidimensionalität eines harmonikal-strukturierten Körpers läßt den Vergleich mit einem harmonikalen Raum oder *Tonraum* zu. So kann auch erst jetzt von einem Intervall im harmonikalen Sinn gesprochen werden. Der Würfel wird so zum ersten Grenzpunkt, dessen „Tiefe“ stereometrisch über die verschiedenen Pyramiden-

würfel bis zum äußeren Grenzpunkt, dem Rhombendodekaeder, ausgedehnt wird. Damit wären die Grenzen eines dreidimensionalen harmonikalen Raumes in seiner einfachsten Form, dem *Oktavenraum,* abgesteckt.



Die Aufgabe, am Beispiel des einfachsten rationalen und rechtwinkligen Dreiecks einen alternativen Weg aufzuzeigen, wäre somit abgeschlossen. Vom harmonikalen Verständnis her bekommt dieses Dreieck einen neuen Inhalt. Dieses „pythagoreische Dreieck“ 3–4–5 oder das *Urdreieck,* wie Albert von THIMUS es in seiner „Harmonikalen Symbolik des Altertums“[1] bezeichnete, bildet so mit den Intervallen Quinte und Quarte innerhalb des Oktavenraumes den Schlüssel auch für den Anfang einer *Morphologie der Musik.*

1) A. v. Thimus, Die harmonikale Symbolik des Alterthums, 2 Bände, Köln 1868-1876, II 157.

PYTHAGOREISCHE ZAHLEN IM OKTAVENRAUM

Bei den bisher behandelten kristallinen Pyramidenwürfeln [210] und [310] wurde mit Hilfe des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 ihre komplementäre Beziehung in einem stereometrischen und harmonikalen Rahmen ausführlich dargestellt. Damit stellt sich aber auch zugleich die Frage nach einem allgemeingültigen Charakter dieses harmonikal-komplementären Prinzips, das auf die verschiedenen Ebenen der

– pythagoreischen Zahlentripel,
– kristallinen Pyramidenwürfel und
– Intervalle

übertragen werden soll.

Die Zonenreihe von Würfel – Pyramidenwürfel – Rhombendodekaeder bietet die Möglichkeit, an den strukturell einfachsten Kristallkörpern, die die Natur hervorbringt, auf mathematischer Basis zu zeigen, daß alle pythagoreischen Zahlentripel bestimmten wechselseitigen Ordnungsfunktionen unterliegen, die sowohl für die Mathematik und Kristallographie als auch für die Harmonik von wesentlicher Bedeutung sind.

Für diese harmonikale Untersuchung werden insbesondere Kristallkörper herangezogen, und von daher ist es selbstverständlich, auf die kristallographische Bezeichnungsweise der Kristallindizes zurückzugreifen, da hier die wohl kürzeste mathematische Form der Beschreibung eines Körpers vorliegt.

Die Formeln, die die Beziehung zwischen den Winkeln zweier Flächen am Kristallkörper und den Kristallindizes angeben, sind schon früh in den Fachbüchern der Kristallographie, z. B. bei ROSE[1] (1838) und MILLER[2] (1856) in übersichtlicher Form dargestellt. Auf Miller geht auch die heute noch übliche Schreibweise der Kristallindizes zurück.

Die Pyramidenwürfel haben die allgemeine Bezeichnung [hk0], oder in konkreten Zahlen z. B. [210], [310], [320], [520].

Übernehmen wir die Beschreibung dieser Pyramidenwürfel oder *Tetrakishexaeder*, wie sie auch genannt werden, von Miller, da sich darauf aufbauend

1) G. Rose, Elemente der Krystallographie, Berlin 1838².
2) W. H. Miller, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1856.

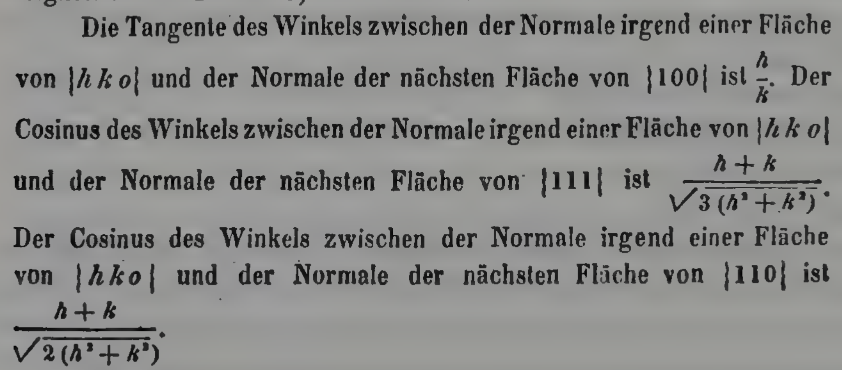
am leichtesten die alternative harmonikale Lösung darstellen läßt.

§. 59. Die Form $\{hko\}$, Fig. 16, hat 24 Flächen und heisst ein **Tetrakishexaeder.**

$$\cos F = \frac{2hk}{h^2+k^2} \qquad \cos G = \frac{h^2}{h^2+k^2}.$$

Man hat somit

in $\{210\}$ $\cos F = \frac{4}{5}$ $\cos G = \frac{4}{5}$,
folglich $F = 36^0\,52'{\cdot}2$, $G = 36^0\,52'{\cdot}2$;
in $\{310\}$ $\cos F = \frac{6}{10}$ $\cos G = \frac{9}{10}$,
folglich $F = 53^0\,7'{\cdot}8$, $G = 25^0\,50'{\cdot}5$;
in $\{320\}$ $\cos F = \frac{12}{13}$ $\cos G = \frac{9}{13}$,
folglich $F = 22^0\,37'.2$, $G = 46^0\,11'{\cdot}2$;
in $\{520\}$ $\cos F = \frac{20}{29}$ $\cos G = \frac{25}{29}$,
folglich $F = 46^0\,23'.8$, $G = 30^0\,27'$.



Die Tangente des Winkels zwischen der Normale irgend einer Fläche von $\{hko\}$ und der Normale der nächsten Fläche von $\{100\}$ ist $\frac{h}{k}$. Der Cosinus des Winkels zwischen der Normale irgend einer Fläche von $\{hko\}$ und der Normale der nächsten Fläche von $\{111\}$ ist $\frac{h+k}{\sqrt{3(h^2+k^2)}}$. Der Cosinus des Winkels zwischen der Normale irgend einer Fläche von $\{hko\}$ und der Normale der nächsten Fläche von $\{110\}$ ist $\frac{h+k}{\sqrt{2(h^2+k^2)}}$.

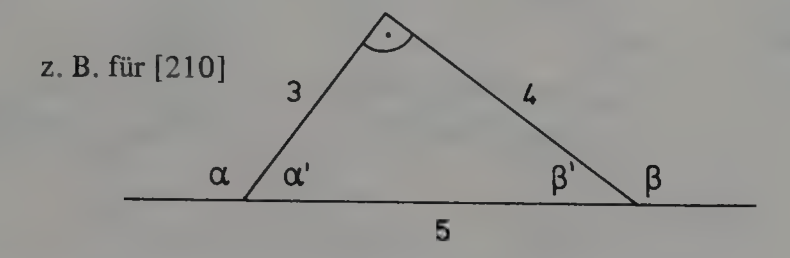
Es sind hier die Formeln für die Berechnung der Winkel zweier Flächen über den Kanten G und F in der cos-Funktion angegeben. Die cos-Werte für die Winkel der entsprechenden Pyramidenwürfel an der Kante F betragen:

Kristallindex	Winkelfunktion	pythagoreische Zahlen
[210]	cos F : 4/5	3–4–5
[310]	cos F : 3/5	3–4–5
[320]	cos F : 12/13	5–12–13
[520]	cos F : 20/29	20–21–29

Diese Winkel entsprechen also den angeführten pythagoreischen Dreiecken. Die Winkel über der Kante G dagegen liegen nicht in der Achsenebene und und können deshalb hier unberücksichtigt bleiben.

1) W. H. Miller, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1856, 31.

Die Winkelfunktion cosF für diesen Winkel – sagen wir β' – gibt den Wert an, der im rechtwinkligen Dreieck dem Innenwinkel entspricht:



und am Kristallkörper die Ergänzung zu 180^0 bedeutet:

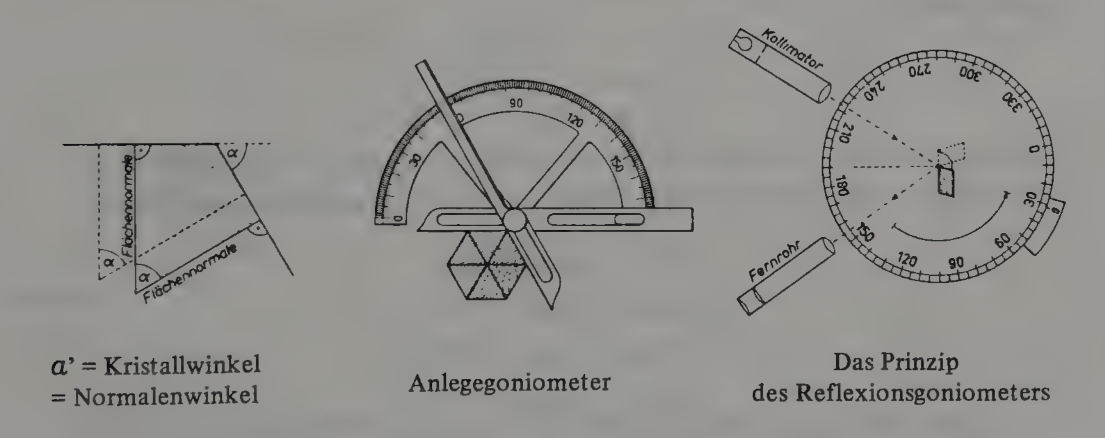
$$\beta = 180^0 - \beta'$$

$$\text{für [210] } \beta = 180^0 - \cos\beta' = 143^0 7' 48''$$

$$\cos\beta = -4/5$$

$$\cos\beta' = 4/5$$

Es ist heute in der Kristallographie üblich, nicht den Innenwinkel zweier angrenzender Kristallflächen zu messen, sondern den Ergänzungswinkel zu 180^0 (Supplementwinkel), der als Normalenwinkel bezeichnet wird. Zur Messung der Kristallwinkel bedient man sich verschiedener Winkelmesser, deren Genauigkeit von ±½ Grad bis ±½ Minute reicht[1].



α' = Kristallwinkel = Normalenwinkel

Anlegegoniometer

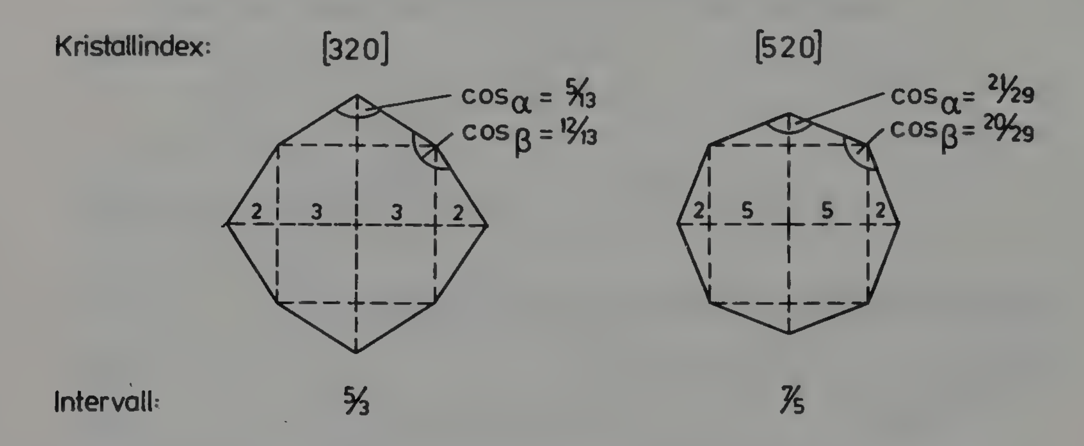
Das Prinzip des Reflexionsgoniometers

Wie lassen sich nun die bei MILLER angegebenen Kristallindizes der Pyramidenwürfel harmonikal einordnen? Die ersten beiden Pyramidenwürfel [210] und [310] wurden schon im vorigen Kapitel im Zusammenhang mit dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 ausführlich behandelt. Es wurde gezeigt, daß die geometrische Darstellung über den zweidimensionalen Schnitt innerhalb der

1) Ramdohr/Strunz, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, 17.

Achsenebene denkbar einfach und leicht nachvollziehbar ist.

Für die beiden Pyramidenwürfel [320] und [520] gilt dies analog:



Da je zwei in der Achsenebene benachbarte Winkel sich zueinander komplementär verhalten, gilt dies auch für die entsprechenden cos-Werte. Bezeichnen wir den Winkel an der Kante F mit β, wie ihn MILLER durch die Formel

$$\cos F = \cos\beta = \frac{2hk}{h^2 + k^2}$$

angibt, dann ist der benachbarte Winkel a, der durch seine Stellung zum Achsenkreuz, da er dessen äußere Begrenzung bildet, ausgezeichnet ist, durch die Winkelfunktion

$$\cos a = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}$$

bestimmt. Für die bei Miller angegebenen Beispiele ergeben sich folgende cos-Werte für den Winkel a, den zwei Flächen über der Pyramidenspitze bilden:

[210]	$\cos a = 3/5$
[310]	$\cos a = 4/5$
[320]	$\cos a = 5/13$
[520]	$\cos a = 21/29$

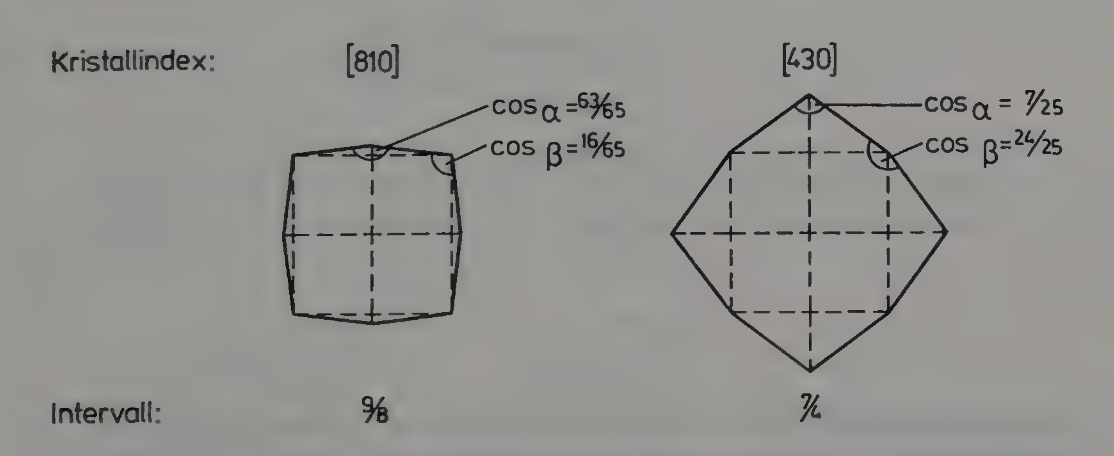
Die Zahlen, die in den Kristallindizes der Pyramidenwürfel enthalten sind, lassen sich nun harmonikal interpretieren, indem man sie über ihr Verhältnis zum Würfel auf das Achsenkreuz bezieht.

Diese vier Kristallkörper werden nun zu einem besseren Vergleich noch einmal zusammengefaßt:

Kristallindex der Pyramidenwürfel [hk0]	Winkelfunktion 2 Flächen in einer Spitze cos α	Kante F (Miller) cos β	pythagoreisches Dreieck	harmonikales Verhältnis am Achsenkreuz
[210]	3/5	4/5	3–4–5	3/2
[310]	4/5	3/5	3–4–5	4/3
[320]	5/12	12/13	5–12–13	5/3
[520]	21/29	20/29	20–21–29	7/5

Man erkennt schon an diesen wenigen Beispielen, daß sich die hohen Zahlen in den Winkelfunktionen leicht in relativ einfache harmonikale Zahlenverhältnisse umwandeln lassen.

Der Winkel α, der das Achsenkreuz des Pyramidenwürfels nach außen begrenzt, gibt gleichzeitig Aufschluß über dessen Teilungsverhältnis zum Würfel. Das bedeutet, daß in flachen Pyramidenwürfeln der Winkel α sehr stumpf, das harmonikale Verhältnis entsprechend nahe 1/1 ist, und daß in steilen Pyramidenwürfeln der Winkel α ziemlich spitz, das harmonikale Verhältnis damit fast 2/1 ist.

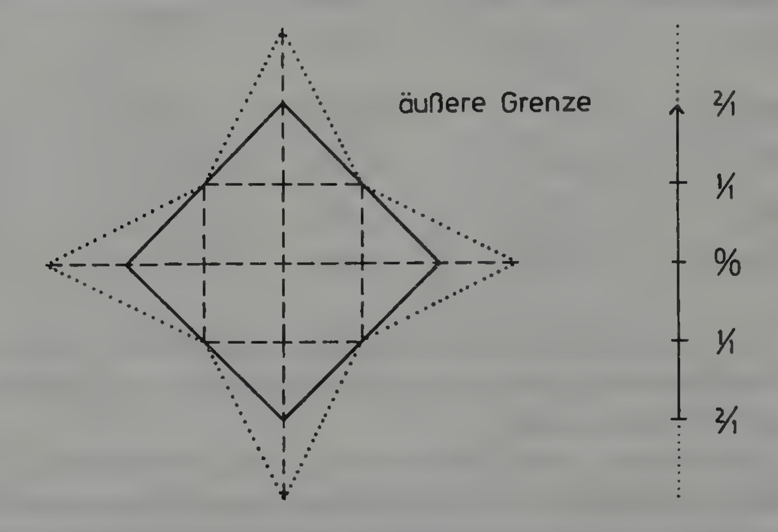


Je größer das Zahlenverhältnis h:k der Indizes dieser Pyramidenwürfel ist, desto flacher sind die aufgesetzten Pyramiden, und umgekehrt, je kleiner das Verhältnis ist, desto steiler sind diese. Das Verhältnis

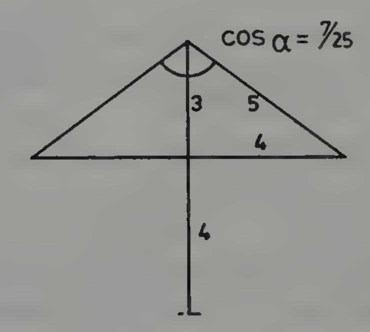
$$\frac{h+k}{h}$$

kann in den Pyramidenwürfeln 2/1 nicht überschreiten, da sonst mathematisch *Sternkörper* des Würfels entstehen würden, die es kristallographisch nicht gibt.

Der Winkel α für die Pyramidenwürfel [hk0] liegt somit zwischen den Grenzwerten 90^0 und 180^0.

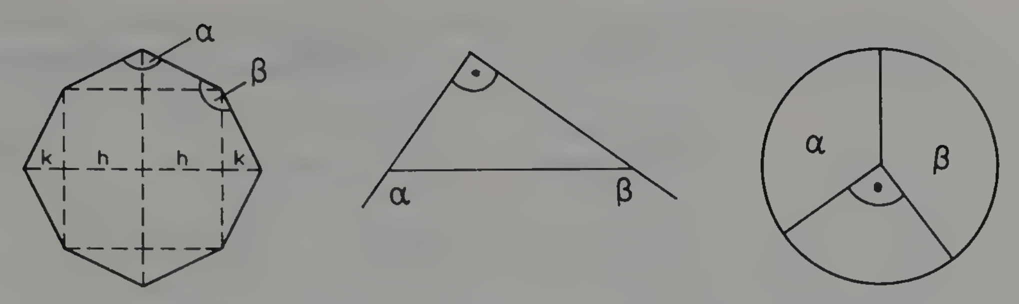


Eine Besonderheit tritt am Pyramidenwürfel [430] auf, die kurz zur Sprache gebracht werden muß. Es ist dies das doppelte Auftreten des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 im Schnitt der Achsenebene.



Aus dem bisher Abgeleiteten ist jedoch klar, daß das nur ein Sonderfall und daß die eigentliche Begrenzung der Winkel des pythagoreischen Dreiecks 7–24–25 bzw. $\cos \alpha = 7/25$ ist. Es gibt noch mehrere Kristallkörper, bei denen das pythagoreische Dreieck 3–4–5 an verschiedenen Stellen ihres strukturellen Aufbaus in mannigfaltiger Weise nachgewiesen werden kann. Wichtig für die harmonikale Bewertung ist jedoch allein die Einordnung am Achsenkreuz.

Da die beiden Winkel α und β sich am gleichen Pyramidenwürfel [hk0] komplementär ergänzen,



läßt sich auch der zugehörige Kristallindex nach dem pythagoreischen Lehrsatz in das entsprechende pythagoreische Dreieck umwandeln.

Der trigonometrische pythagoreische Lehrsatz lautet:

$$\cos^2 \alpha \quad + \quad \cos^2 \beta \quad = \quad 1^2$$

Daraus ergibt sich:

$$\left(\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}\right)^2 \quad + \quad \left(\frac{2hk}{h^2 + k^2}\right)^2 \quad = \quad 1^2$$

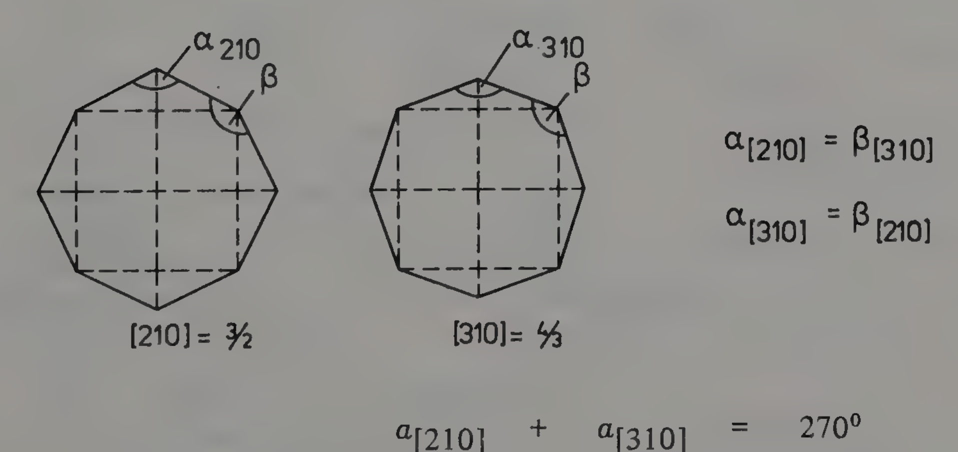
z. B. für [210]

$$\left(\frac{2^2 - 1^2}{2^2 + 1^2}\right)^2 \quad + \quad \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2 + 1^2}\right)^2 \quad = \quad 1^2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad + \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad = \quad 1^2$$

$$3^2 \quad + \quad 4^2 \quad = \quad 5^2$$

Da sich aber auch die α-Winkel der beiden verschiedenen Pyramidenwürfel [210] und [310] komplementär im Raum ergänzen, gilt entsprechend:



	$\alpha_{[210]}$	+	$\alpha_{[310]}$	=	270°
Flächenwinkel:	126° 52'	+	143° 8'	=	270°
Normalenwinkel:	53° 8'	+	36° 52'	=	90°

$$\cos^2 \alpha_{[210]} + \cos^2 \alpha_{[310]} = 1^2$$

$$\left(\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}\right)^2_{[210]} + \left(\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}\right)^2_{[310]} = 1^2$$

$$\left(\frac{2^2 - 1^2}{2^2 + 1^2}\right)^2 + \left(\frac{3^2 - 1^2}{3^2 + 1^2}\right)^2 = 1^2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Damit wäre die Beziehung vom Kristallindex zweier Pyramidenwürfel, die sich komplementär ergänzen, zum Begrenzungswinkel α in der Achsenebene hergestellt. Dies gilt nicht nur für die beiden hier behandelten Pyramidenwürfel [210] und [310], sondern allgemein: es gibt immer zwei verschiedene Pyramidenwürfel, die dem gleichen pythagoreischen Dreieck zugeordnet werden können und deren Winkel sich in der Achsenebene stereometrisch ergänzen.

Aus den Kristallindizes zweier zusammengehöriger Pyramidenwürfel allein ist ein harmonikaler Zusammenhang nicht direkt erkennbar.

Würfel	Pyramidenwürfel		Rhomben-dodekaeder	pythagoreische Dreiecke
[100]			[110]	
	[310]	[210]		3–4–5
	[510]	[320]		5–12–13
	[710]	[430]		7–24–25
	[910]	[540]		9–40–41
	[410]	[530]		8–15–17
	[520]	[730]		20–21–29

Erst die Umwandlung dieser Kristallindizes in Intervalle läßt den harmonikalen Zusammenhang deutlich hervortreten.

[100] 1/1 — [110] 2/1

[310] 4/3 — [210] 3/2

[510] 6/5 — [320] 5/3

[710] 8/7 — [430] 7/4

[910] 10/9 — [540] 9/5

[410] 5/4 — [520] 8/5

[520] 7/5 — [730] 10/7

Das Produkt zweier harmonikaler Proportionen, die sich dem gleichen rechtwinkligen Dreieck zuordnen lassen, ergibt immer den Zahlenwert 2/1. Anders ausgedrückt: so wie sich zwei Winkel am pythagoreischen Dreieck zu 90⁰ ergänzen, komplementieren sich zwei Intervalle zur Oktave.

1/1		2/1	=	2/1	
[310] 4/3	$\otimes$	[210] 3/2	=	12/6	3–4–5
[510] 6/5	$\otimes$	[320] 5/3	=	30/15	5–12–13
[710] 8/7	$\otimes$	[430] 7/4	=	56/28	7–24–25
[910] 10/9	$\otimes$	[540] 9/5	=	90/45	9–40–41
[410] 5/4	$\otimes$	[530] 8/5	=	40/20	8–15–17
[520] 7/5	$\otimes$	[730] 10/7	=	70/35	20–21–29

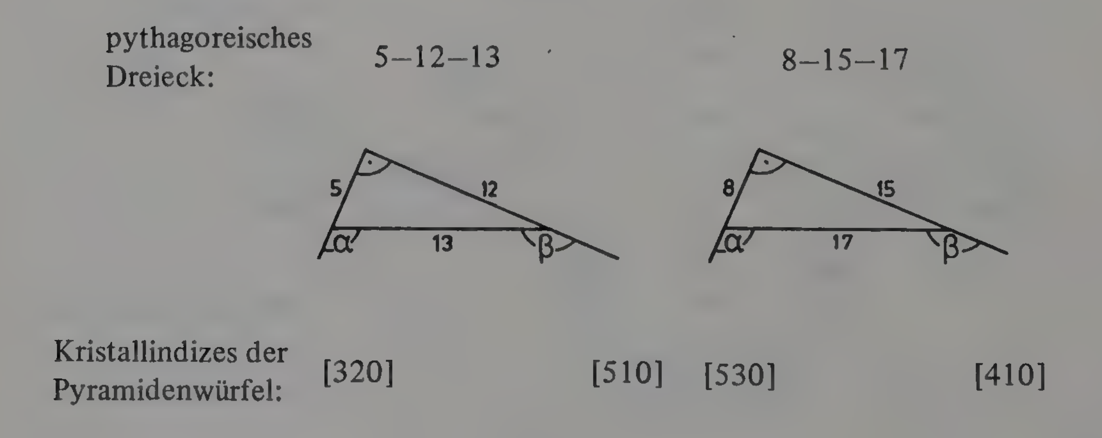
Man kann also immer ein bestimmtes Paar von Pyramidenwürfeln bilden, die sich in ihren Winkeln innerhalb der Achsenebene sozusagen im Raum gegenseitig ergänzen und sich einem einzigen pythagoreischen Dreieck zuordnen lassen, wobei sich innerhalb des Oktavenraumes die beiden entsprechenden Intervalle komplementieren.

Das pythagoreische Dreieck 3–4–5 ist das erste rationale rechtwinklige Dreieck. Es bildet innerhalb des Oktavenraumes über seine harmonikale Begrenzung am Achsenkreuz die beiden Intervalle Quinte und Quarte. Die beiden Intervalle sind auf den Primzahlen 2 und 3 aufgebaut, wie dies auch für die pythagoreische Tonleiter kennzeichnend ist (213).

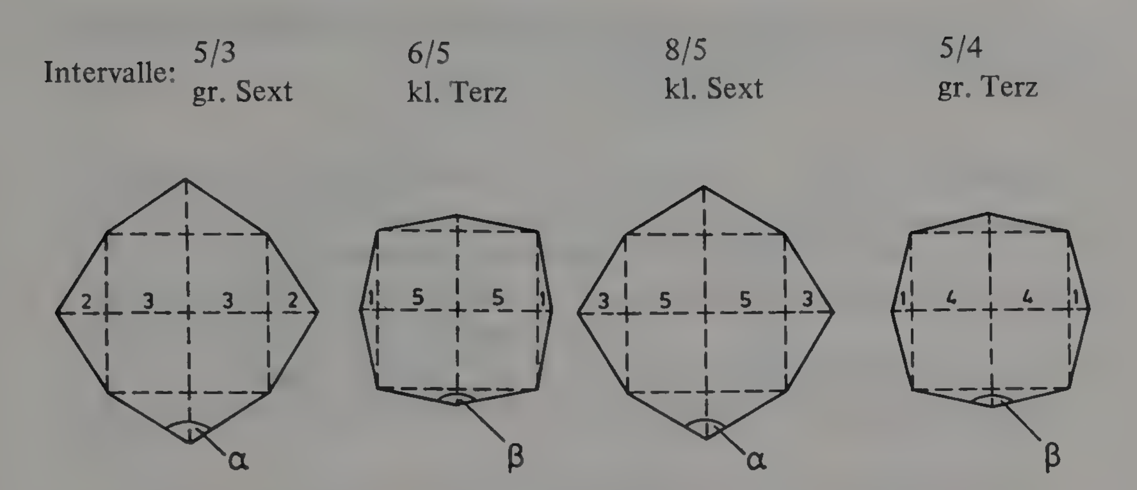
Durch Einbeziehung der beiden nächsten pythagoreischen Dreiecke 5–12–13 und 8–15–17 in die harmonikale Untersuchung entstehen die beiden Terzen 5/4 und 6/5 sowie die beiden Sexten 5/3 und 8/5. Als neues Zahlenelement kommt in den Intervallen damit die Primzahl 5 hinzu, die in diesen beiden pythagoreischen Dreiecken ihren harmonikalen Ursprung hat.

pyth. Dreiecke	Intervalle		Primzahlen
3–4–5	3/2 Quint	4/3 Quart	2, 3
5–12–13	5/3 gr. Sext	6/5 kl. Terz	2, 3, 5
8–15–17	8/5 kl. Sext	5/4 gr. Terz	

Diese Intervalle sind harmonikal so wichtig, daß es angebracht erscheint, die ihnen zugeordneten Raumkörper – hier als Pyramidenwürfel – ebenfalls detaillierter darzustellen.



Intervalle:	5/3 gr. Sext	6/5 kl. Terz	8/5 kl. Sext	5/4 gr. Terz



Aus den Beispielen von pythagoreischen Zahlentripeln, die bisher behandelt wurden, wird ersichtlich, daß es auch zu den Primzahlen eine besondere harmonikale Beziehung gibt. So muß für die harmonikale Bewertung dieser Zahlen berücksichtigt werden, ob diese in den Katheten oder in der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks enthalten sind. Die hohen Primzahlen in den Hypotenusen der pythagoreischen Dreiecke tauchen in den entsprechenden Intervallen nicht mehr auf. Es ergibt sich gerade durch eine solche harmonikale Differenzierung eine neuartige Perspektive auch zu einer speziellen Thematik der *Primzahlen* .

Nachdem so viele Einzelbeispiele für derartige *Tonkörper* aufgeführt worden sind, sollen die Ergebnisse nun verallgemeinert werden. Dabei geht es um das harmonikale Prinzip, dem alle Pyramidenwürfel innerhalb dieser Zonenreihe und analog auch alle Intervalle innerhalb der Oktavenreihe unterliegen.

1) Der Zusammenhang zwischen Kristallindizes und Intervallen läßt sich – unter der Voraussetzung, daß $h > k$ ist – folgendermaßen darstellen:

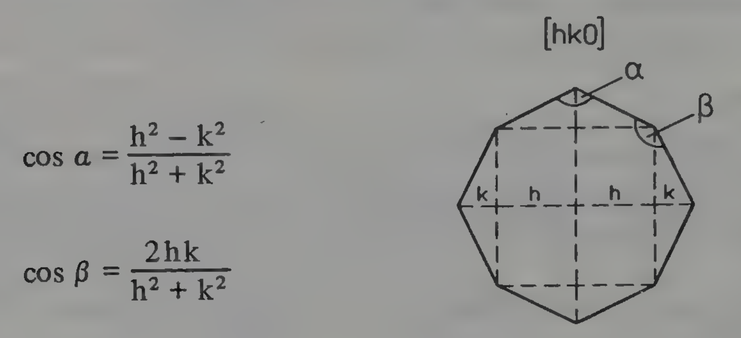
	Würfel	Pyramidenwürfel	Rhombendodekaeder
Kristallindex:	[100]	[hk0]	[110]
harmonikale Intervalle:	1/1	$\frac{h+k}{h}$	2/1

Jeder Pyramidenwürfel läßt sich auf einfache Weise in seine harmonikale Funktion umwandeln:

$$[hk0] \rightarrow \frac{h+k}{h}$$

Dieser mathematische Vorgang gilt aber auch umgekehrt, indem jedes Intervall sich in einem harmonikalen Raum stereometrisch darstellen läßt.

2) Die Formeln für die Berechnung der beiden Winkel α und β aus den Indizes eines Pyramidenwürfels [hk0] sind:



$$\cos \alpha = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}$$

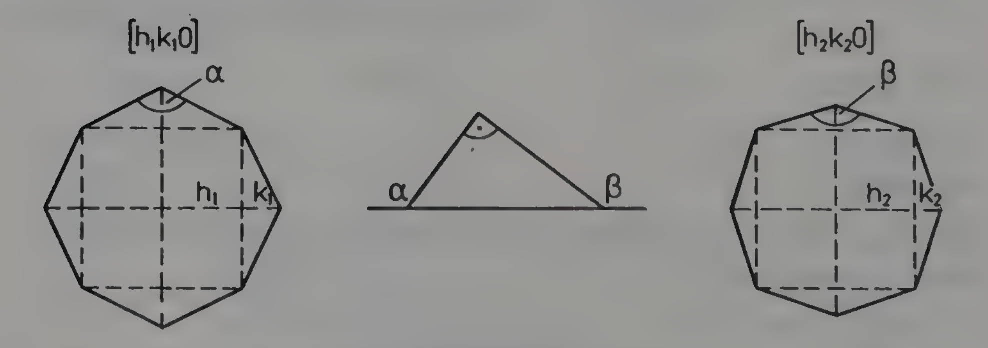
$$\cos \beta = \frac{2hk}{h^2 + k^2}$$

Die Winkel α und β am Pyramidenwürfel entsprechen den Außenwinkeln α und β eines pythagoreischen Dreiecks

$$\alpha + \beta = 270^0.$$

3) Es ergänzt sich aber auch jeweils ein Paar von Pyramidenwürfeln $[h_1k_10]$ und $[h_2k_20]$ über die zugehörigen Winkel α_1 und α_2, wobei beide Körper wiederum nur einem pythagoreischen Dreieck zugeordnet sind.

$[h_1k_10]$		$[h_2k_20]$		
$\cos^2 \alpha_1$	+	$\cos^2 \alpha_2$	=	1^2
$\left(\frac{h_1^2 - k_1^2}{h_1^2 + k_1^2}\right)^2$	+	$\left(\frac{h_2^2 - k_2^2}{h_2^2 + k_2^2}\right)^2$	=	1^2



4) Innerhalb des Oktavenraums ergänzen sich jeweils zwei Intervalle, die dem gleichen pythagoreischen Zahlentripel zugeordnet sind, komplementär zur Oktave. Dabei bilden die Zahlenpaare (h_1/k_1) und (h_2/k_2), die den Kristallindizes zweier komplementärer Pyramidenwürfel entsprechen, die mathema-

tische Grundlage für eine Umschreibung des Oktavenraums:

$$\frac{h_1 + k_1}{h_1} \otimes \frac{h_2 + k_2}{h_2} = \frac{2}{1}$$

Es sind also die Zahlen (h/k) der Kristallindizes zweier stereometrisch komplementärer Pyramidenwürfel $[h_1 k_1 0]$ und $[h_2 k_2 0]$, die diese paarweise Beziehung zu e i n e m pythagoreischen Dreieck haben.

Wie lassen sich nun diese Zahlenpaare geometrisch und algebraisch finden und entsprechend harmonikal interpretieren?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Zusammenhang von Zahlenpaaren, pythagoreischen Dreiecken und Intervallen geometrisch und algebraisch darzustellen.

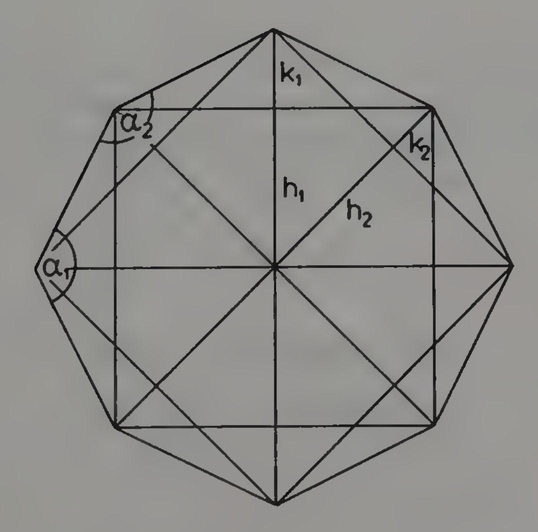
Man kann zunächst von dem Schnitt durch die Ebene des Achsenkreuzes eines Pyramidenwürfels $[h_1 k_1 0]$ ausgehen. Das eingeschriebene Quadrat liefert das erste Zahlenpaar (h_1/k_1), das sich bekanntlich in das entsprechende Intervall

$$\frac{h_1 + k_1}{h_1}$$

umwandeln läßt. Durch das Einzeichnen eines zweiten Quadrates und dessen Diagonalen in das Grundschema lassen sich die Achsenverhältnisse beider Pyramidenwürfel in einer einzigen geometrischen Figur darstellen. Das neue Quadrat schneidet die Achsen im Verhältnis des zweiten Zahlenpaares (h_2/k_2) des Pyramidenwürfels $[h_2 k_2 0]$, wobei sich das komplementäre Intervall

$$\frac{h_2 + k_2}{h_2}$$

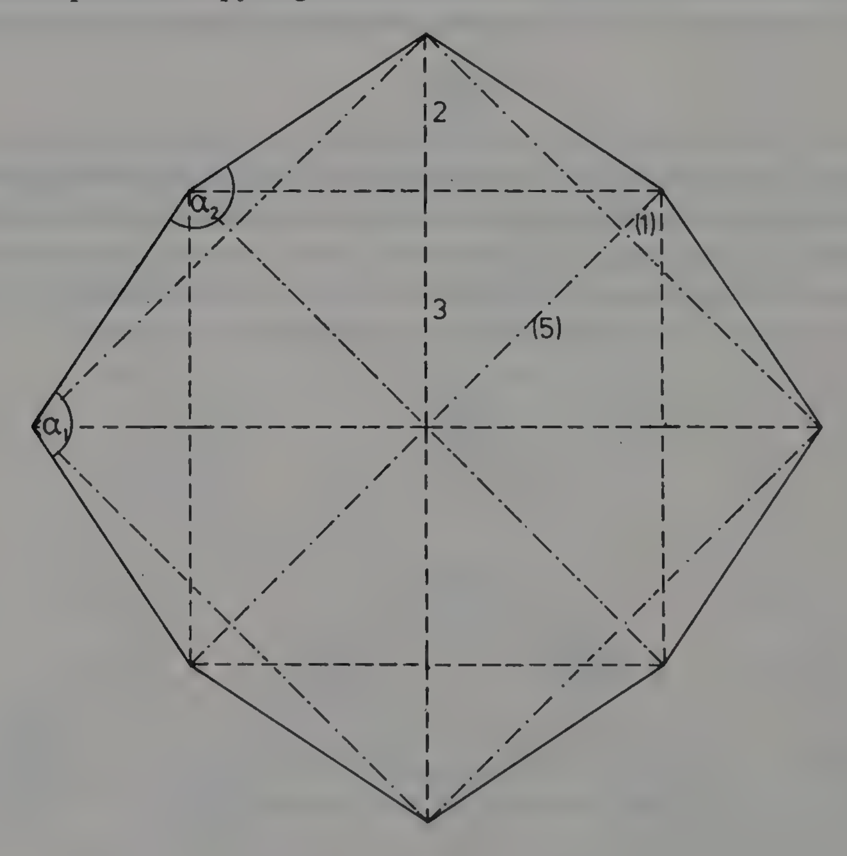
ergibt.



1. Pyramidenwürfel:	$[h_1 k_1 0]$
1. Zahlenpaar:	(h_1/k_1)
1. Intervall:	$\frac{h_1 + k_1}{h_1}$
2. Pyramidenwürfel:	$[h_2 k_2 0]$
2. Zahlenpaar:	(h_2/k_2)
2. Intervall:	$\frac{h_2 + k_2}{h_2}$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$$

Als Beispiel für das pythagoreische Dreieck 5–12–13:



1. Pyramidenwürfel:	[320]
1. Zahlenpaar:	(3/2)
1. Intervall:	5/3

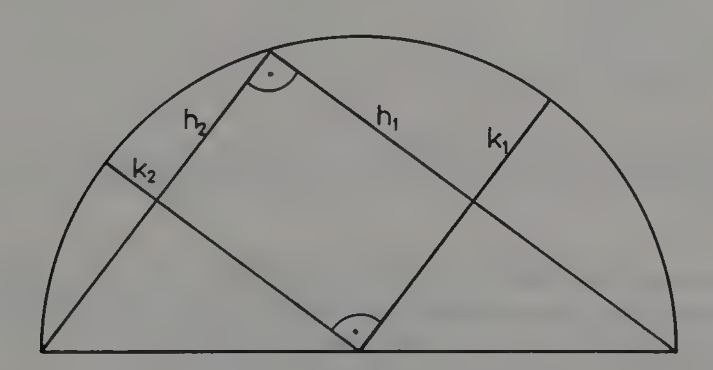
$\cos \alpha_1 = -5/13$

2. Pyramidenwürfel: [510]
2. Zahlenpaar: (5/1)
2. Intervall: 6/5

$\cos a_2 = -12/13$

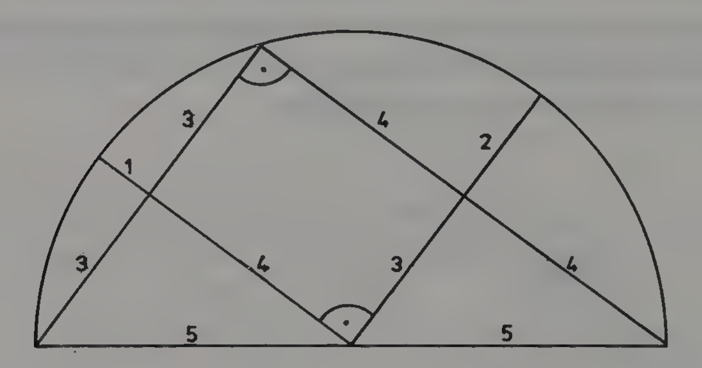
	$\cos^2 a_1$	+	$\cos^2 a_2$	=	1^2
komplementäre Winkel	$(5/13)^2$	+	$(12/13)^2$	=	1^2
komplementäre Intervalle	5/3	⊗	6/5	=	2/1
	gr. Sext	⊗	kl. Terz	=	Oktave

Der Zusammenhang von Zahlenpaaren, Intervallen, pythagoreischem Dreieck und seinem Umkreis läßt sich vom geometrischen Verständnis her noch einfacher durch die nachfolgende Lösung darstellen.



Es stehen die Zahlenpaare (h_1/k_1) und (h_2/k_2) in direkter Beziehung zum pythagoreischen Dreieck und seinem Umkreis. Bei dieser geometrischen Lösung ist eine stereometrische und harmonikale Übertragung in den Raum ohne Berücksichtigung des Gesamtzusammenhangs am Achsenkreuz nicht möglich. Beispiele auf der nächsten Seite.

pythagoreisches Dreieck	Verhältnis des 1. Zahlenpaares	1. Intervall	Verhältnis des 2. Zahlenpaares	2. Intervall
a–b–c	$h_1 : k_1$	$\frac{h_1 + k_1}{h_1}$	$h_2 : k_2$	$\frac{h_2 + k_2}{h_2}$
3–4–5	4:2 = 2:1	3/2	3:1	4/3
5–12–13	12:8 = 3:2	5/3	5:1	6/5
8–15–17	15:9 = 5:3	8/5	8:2 = 4:1	5/4
7–24–25	24:18 = 4:3	7/4	7:1	8/7



Gerade aus diesen Beispielen ist leicht zu erkennen, daß auch die Zahlenpaare (h_1/k_1) und (h_2/k_2) untereinander in ein Verhältnis $h_1 : k_1$ und $h_2 : k_2$ gebracht werden können, das jedoch n i c h t harmonikal ist.

Die Berechnung des zweiten Zahlenpaares (h_2/k_2) aus dem ersten (h_1/k_1) und seine harmonikale Umwandlung ergeben sich auch mathematisch aus der Formel, die den Oktavenraum beschreibt (siehe Seite 53).

$$\frac{h_1 + k_1}{h_1} \otimes \frac{h_2 + k_2}{h_2} = 2/1$$

$$\frac{h_2 + k_2}{h_2} = \frac{2h_1}{h_1 + k_1}$$

$$h_2 = h_1 + k_1$$

$$k_2 = h_1 - k_1$$

1. Zahlenpaar:	h_1	2. Zahlenpaar:	h_2	=	$h_1 + k_1$
	k_1		k_2	=	$h_1 - k_1$
1. Intervall:	$\frac{h_1 + k_1}{h_1}$	2. Intervall:	$\frac{h_2 + k_2}{h_2}$	=	$\frac{2h_1}{h_1 + k_1}$

Die beiden Zahlenpaare (h_1/k_1) und (h_2/k_2) haben über den pythagoreischen Lehrsatz eine Beziehung zu dem zugeordneten pythagoreischen Zahlentripel (siehe die Seiten 47, 48 und 53).

Trigonometrischer pythagoreischer Lehrsatz:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1^2$$

$$\left(\frac{h_1^2 - k_1^2}{h_1^2 + k_1^2}\right)^2 + \left(\frac{h_2^2 - k_2^2}{h_2^2 + k_2^2}\right)^2 = 1^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ein Zahlenbeispiel mag diesen Zusammenhang noch einmal verdeutlichen:

Gegeben: 1. Zahlenpaar $(h_1/k_1) = (3/2)$

Gesucht: a) 2. Zahlenpaar (h_2/k_2)
b) beide Intervalle
c) das entsprechende pythagoreische Zahlentripel

a) 2. Zahlenpaar: $h_2 = h_1 + k_1$ $\quad k_2 = h_1 - k_1$

$h_2 = 3 + 2 = 5$ $\quad k_2 = 3 - 2 = 1$

2. Zahlenpaar: (5, 1)

b) 1. Intervall: $\frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$

2. Intervall: $\frac{5 + 1}{5} = \frac{6}{5}$

Beide Intervalle ergänzen sich zur Oktave:

$$5/3 \otimes 6/5 = 2/1$$

c) Entwicklung des zugehörigen pythagoreischen Dreiecks:

$$\frac{3^2-2^2}{3^2+2^2} \quad + \quad \frac{5^2-1^2}{5^2+1^2} \quad = \quad 1^2$$

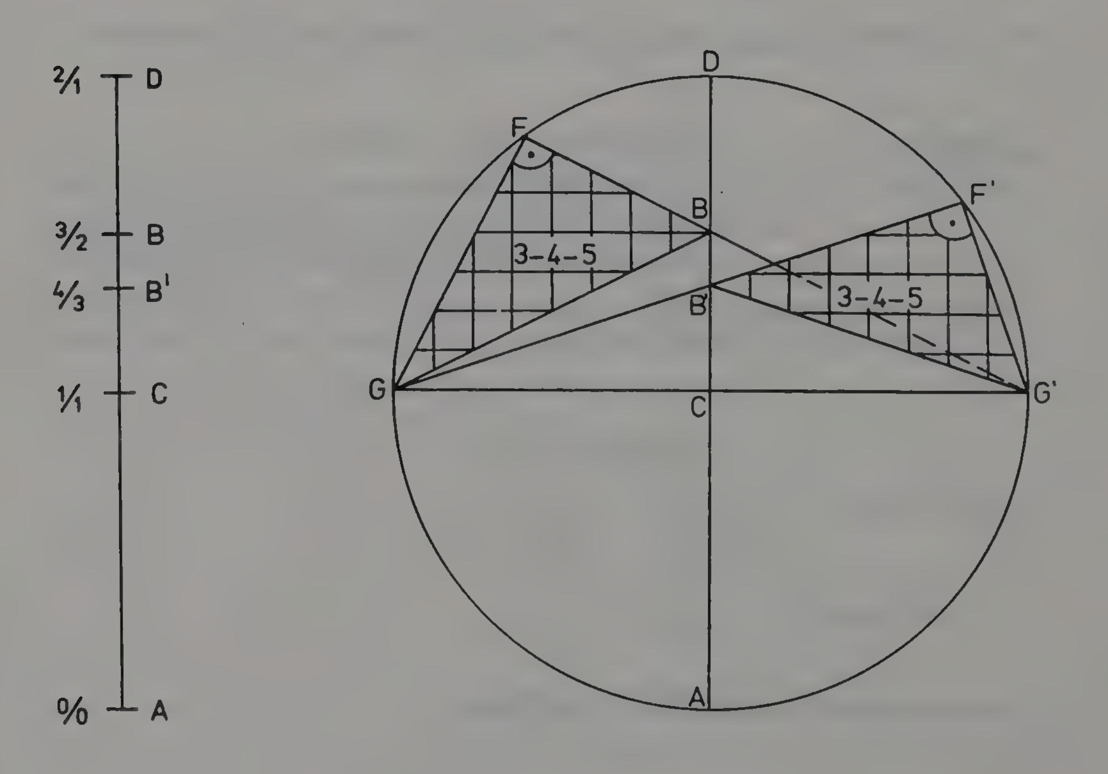
$$(\frac{5}{13})^2 \quad + \quad (\frac{12}{13})^2 \quad = \quad 1^2$$

$$5^2 \quad + \quad 12^2 \quad = \quad 13^2$$

pythagoreisches Zahlentripel: 5–12–13

Die beiden Zahlenpaare (3/2) und (5/1) haben ihren stereometrischen Bezug in den Pyramidenwürfeln [320] und [510]. Diese lassen sich in eine harmonikale Proportion umwandeln, wobei sich die Intervalle 5/3 und 6/5 ergeben. Für eine harmonikale Bewertung von Zahlen ist der theoretische Hintergrund, wie er hier abgeleitet wurde, sehr wichtig. So ist das Längenverhältnis 3:2 nicht unbedingt eine Quinte, sondern diese entsteht erst über ihre Einordnung am Achsenkreuz.

Die Wechselbeziehungen von Zahlenpaaren, komplementären Intervallen und zugeordneten pythagoreischen Dreiecken lassen sich geometrisch in einem einfachen Kreisschema weiter aufschlüsseln.

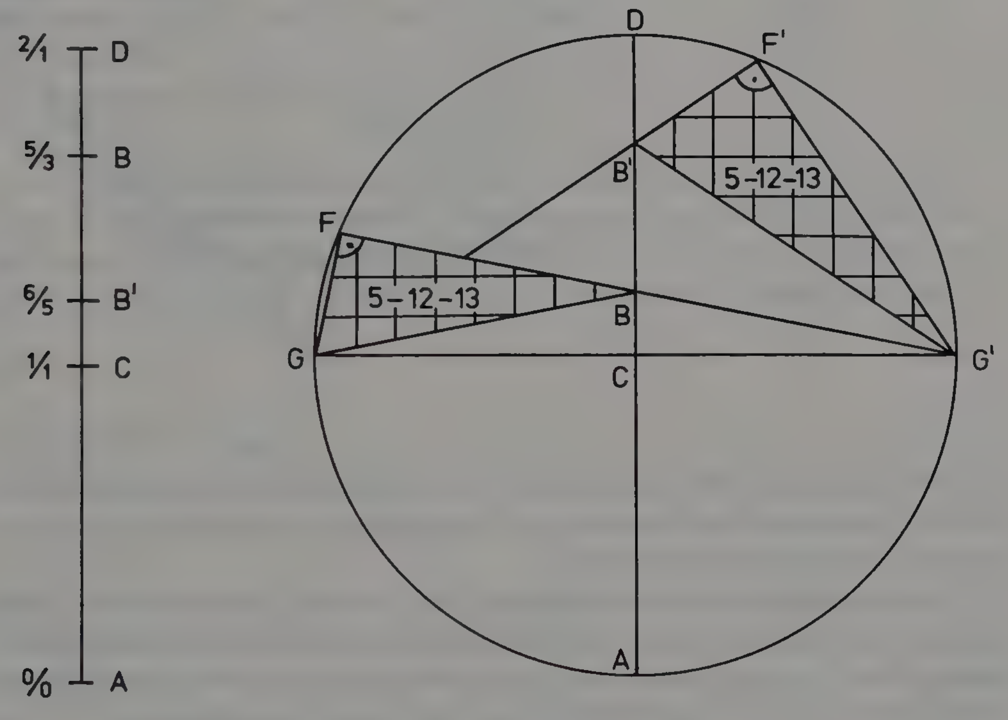


	Teilungsverhältnis des Zahlenpaares	Intervall	
$\Delta GFB \cong \Delta G'F'B'$	$\overline{AC} : \overline{CB} = 2:1$	$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$	Quinte
	$\overline{AC} : \overline{CB'} = 3:1$	$\frac{AB'}{AC} = \frac{4}{3}$	Quarte

Die beiden pythagoreischen Dreiecke sind kongruent, jedoch sind ihre Katheten in ihrer Beziehung zum Achsenkreuz vertauscht.

$$BF : FG : GB = G'F' : F'G' : G'B' = 3:4:5$$

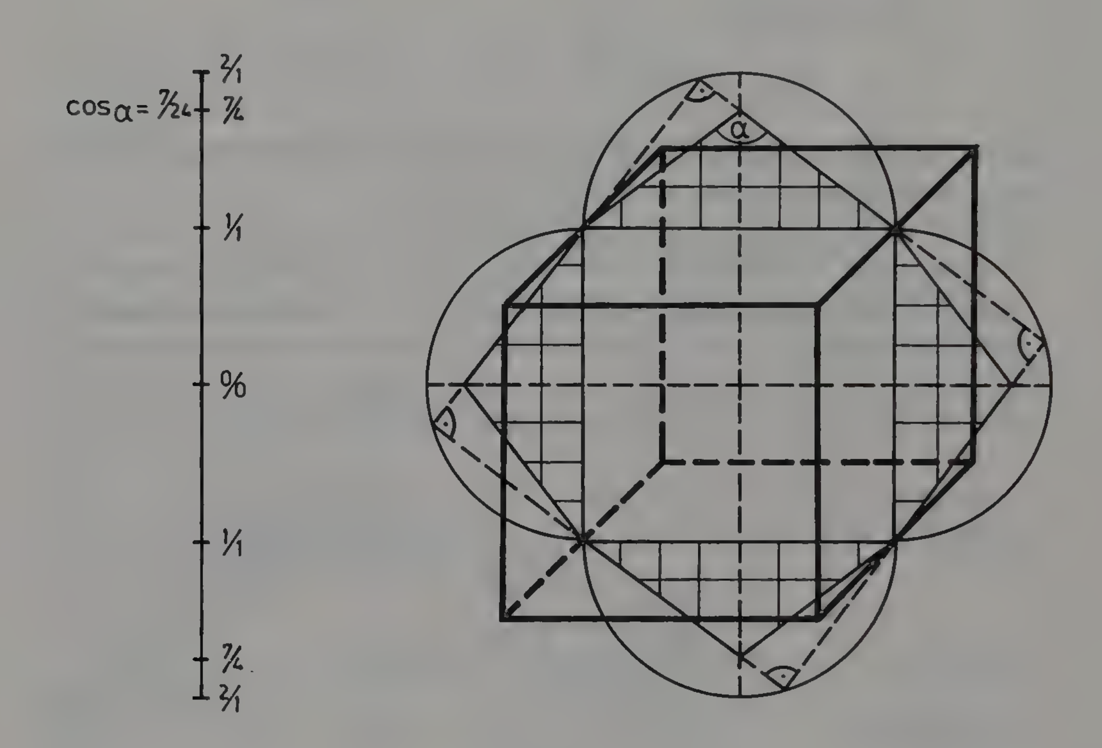
Auch das nächste pythagoreische Dreieck 5–12–13 soll hier in dieser Form vorgestellt werden.



	Teilungsverhältnis des Zahlenpaares	Intervall	
$\Delta GFB \cong \Delta G'F'B'$	$AC : CB = 3:2$	$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$	gr. Sext
	$AC : CB' = 5:1$	$\frac{AB'}{AC} = \frac{6}{5}$	kl. Terz

$$BF : FG : GB = G'F' : F'B' : B'G' = 5:12:13$$

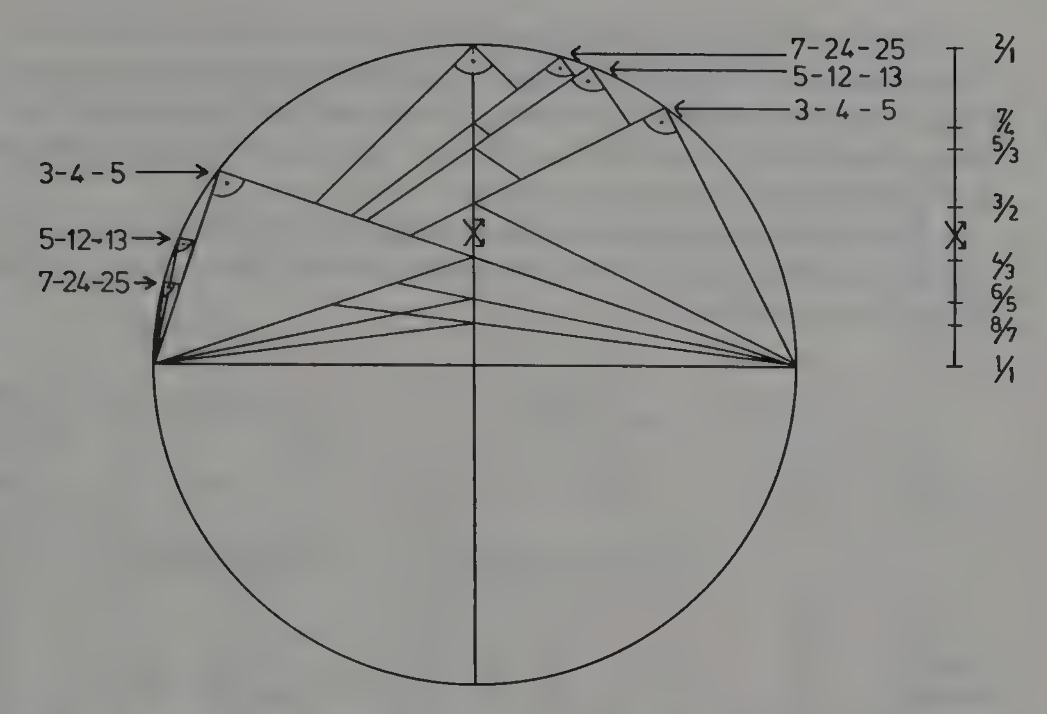
Dabei ist es selbstverständlich, daß sich ein solches vereinfachtes Kreis-Schema – hier am Beispiel des Pyramidenwürfels [430] – auch in den bisher beschriebenen Schnitt durch die Achsenebene einfügen läßt.



Der Winkel *α* sowie seine Ergänzung *α'* und das entsprechende pythagoreische Dreieck lassen sich durch eine solche geometrische Darstellung auch harmonikal auf das Achsenkreuz beziehen.

Untersuchen wir in diesem Kreis-Schema die ersten pythagoreischen Zahlendreiecke und die ihnen entsprechenden Intervalle, so wird ersichtlich, daß innerhalb der Oktavenreihe 1/1–2/1 die Intervalle eines zugehörigen pythagoreischen Dreiecks sich je zur Hälfte immer mehr dem Kreismittelpunkt 1/1 bzw. entgegengesetzt dem Endpunkt des Kreisdurchmessers 2/1 nähern.

Es liegt hier ein interessanter harmonikaler Aspekt vor, indem man zeigen kann, daß auch die Umkehrung zweier komplementärer Intervalle an ein einziges geometrisches Strukturelement – ein rationales rechtwinkliges Dreieck – gebunden ist.



Um den geometrischen Hintergrund der Umkehrung – hier durch das Zeichen ⤨ gekennzeichnet – zweier komplementärer Intervalle besser zu erkennen, kann man diese pythagoreischen Dreiecke auch aus dem Zusammenhang von Achsenkreuz und Kreis-Schema herauslösen und sie isoliert behandeln.

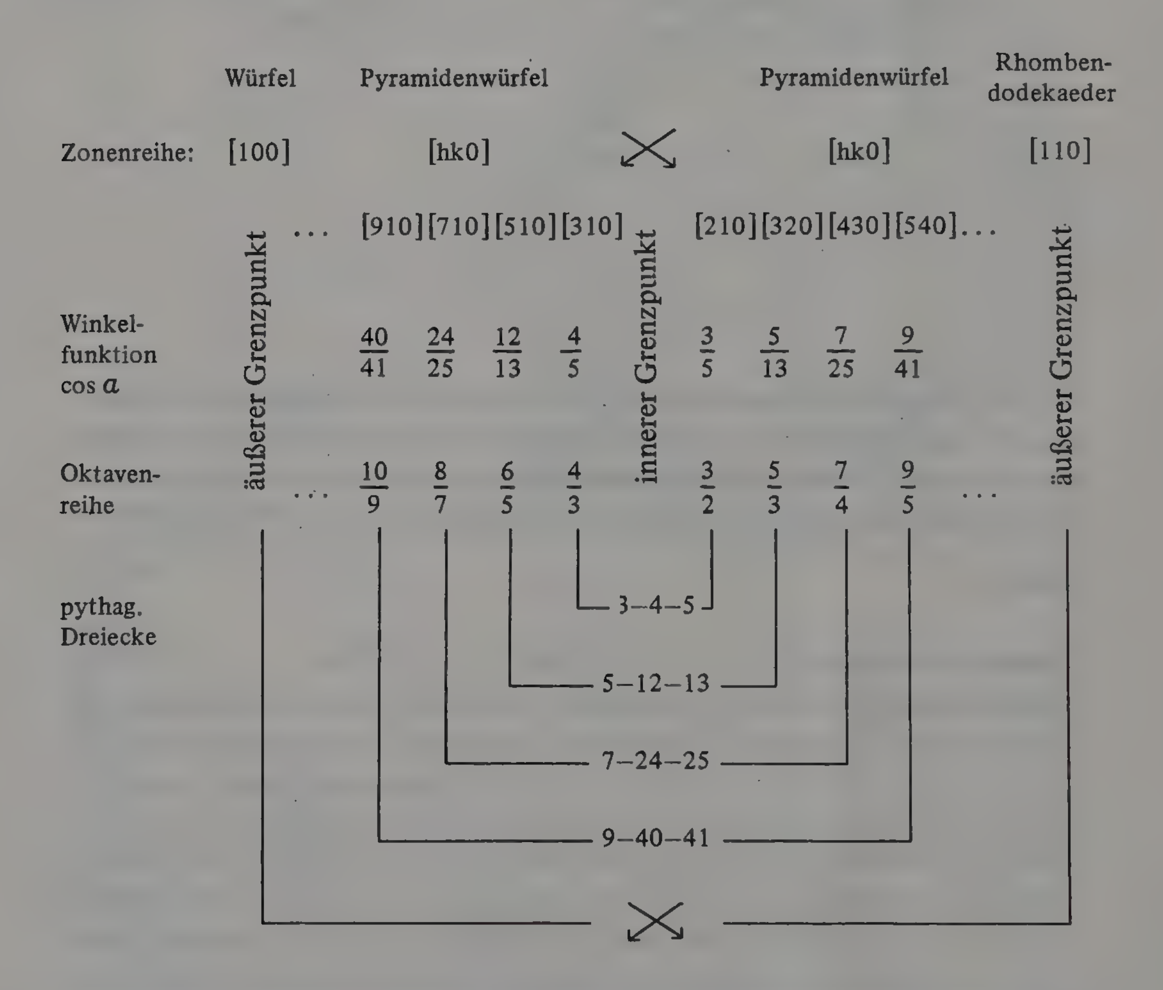
Intervall:	4/3	6/5	8/7	10/9
Winkelfunktion cos α:	4/5	12/13	24/25	40/41

5 4 3 α β — 13 12 5 α β — 25 24 7 α β — 41 40 9 α β

Intervall:	3/2	5/3	7/4	9/5
Winkelfunktion cos β:	3/5	5/13	7/25	9/41

Man erkennt schon aus den wenigen Beispielen, daß bei fortschreitender Entwicklung die Reihe dieser pythagoreischen Dreiecke innerhalb zweier äußerer Grenzpunkte liegen muß, indem auf der linken Seite des letzten Diagramms der Winkel a dem Wert von 45^0 und auf der rechten Seite der Winkel a dem Wert von 90^0 immer näher kommt.

Ordnen wir nun die pythagoreischen Dreiecke in das schon gewohnte Bild von Zonen- und Oktavenreihe mit den beiden äußeren Grenzpunkten und dem inneren Umkehrpunkt ein:



so läßt sich der stereometrische Hintergrund der Pyramidenwürfel über die Oktavenreihe auf die Ebene der pythagoreischen Dreiecke transformieren.

Der innere Umkehr- und Kreuzungspunkt der vorliegenden Zonenreihe soll nun noch näher untersucht werden. Er wird durch das Symbol des *Pfeilenkreuzes* ⤩ dargestellt und ist dem Buch des Freiherrn von THIMUS „Die harmonikale Symbolik des Altertums" entnommen[1]. Dieses Pfeilenkreuz spielte für

1) A. v. Thimus, Die harmonikale Symbolik des Alterthums, 2 Bände, Köln 1868-1876; Nachdruck Hildesheim 1976.

Thimus bei der geschichtlichen Entwicklung von „Ton-Leitern" und ihrer enharmonischen Differenzierung eine zentrale Rolle. Sein Grundprinzip entspricht dem folgenden Schema:

$$a \longrightarrow a\omega\frac{a^0+\omega^0}{a^1+\omega^1} \quad \times \quad \frac{a^1+\omega^1}{a^0+\omega^0} \longleftarrow \omega$$

$$1 \longrightarrow 2\cdot\frac{2}{3} \quad \times \quad \frac{3}{2} \longleftarrow 2$$

Es ist an dieser Stelle nicht möglich, tiefer in das Wesen der Thimusschen Reihen einzugehen, da er in seiner Harmonikalen Symbolik von vollkommen anderen Voraussetzungen ausgeht, als dies hier der Fall ist. Dennoch besteht eine gewisse Analogie in der Thematik des Kreuzungspunktes $\times$, soweit es die gegenseitige Durchdringung von zwei harmonikalen Reihen innerhalb zweier Grenzwerte betrifft. Da Thimus sehr ausführlich auf die geschichtliche Bedeutung dieses Zeichens eingeht, wird besonders auf dieses Buch hingewiesen.

Aus dem bisher Abgeleiteten geht hervor, daß es innerhalb der Zonen- und Oktavenreihe zu jedem rationalen und rechtwinkligen Dreieck, das die äußere Begrenzung in der Achsenebene bildet, stereometrisch zwei komplementäre Pyramidenwürfel mit rationalen Achsenabschnitten und dementsprechend harmonikal zwei komplementäre Intervalle, die aus rationalen Zahlen bestehen, gibt.

Diese Rationalität ist ein besonderes Kennzeichen der Kristalle, entsprechend dem kristallographischen Gesetz der rationalen Indizes.

Untersuchen wir nun die Zonenreihe der Pyramidenwürfel bzw. die entsprechende Oktavenreihe,

Zonenreihe: [100]... [910][710][510][310] [210][320][430][540]... [110]

Oktavenreihe: 1/1 ... 10/9 8/7 6/5 4/3 $\times$ 3/2 5/3 7/4 9/5 ... 2/1

4/3 – 3–4–5 – 3/2
6/5 – 5–12–13 – 5/3
8/7 – 7–24–25 – 7/4
10/9 – 9–40–41 – 9/5

so wird schon hieraus ersichtlich, daß der Kreuzungspunkt in der Oktavenreihe dem irrationalen Verhältnis $\sqrt{2/1}$ entspricht, welches das geometrische Mittel des Oktavenraumes 2/1 darstellt.

Das geometrische Mittel $\sqrt{2}$ hat demzufolge einen stereometrischen Hintergrund, indem es in einem Zonenverband eingebettet ist und diesen so teilt, daß

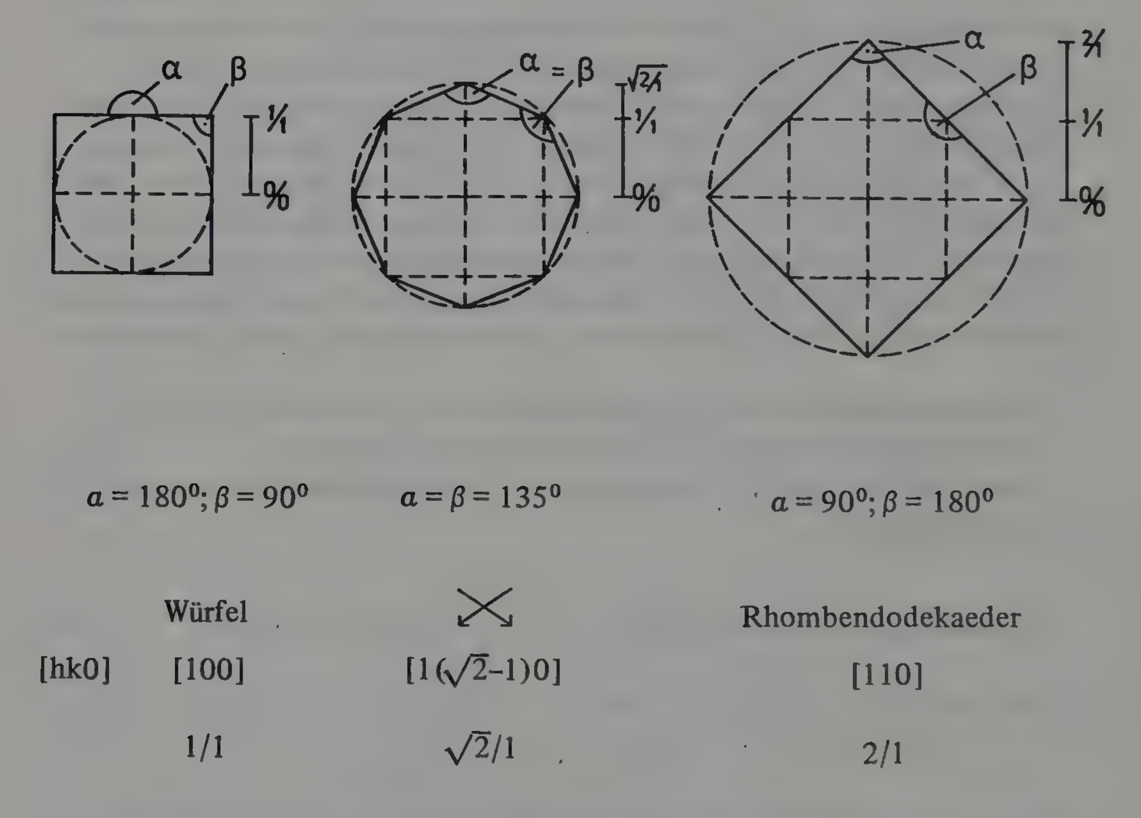
zwei harmonikale Teilbereiche entstehen, die sich proportional zueinander verhalten wie:

$$1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$$

Es läßt sich nun der Ort dieser Umkehrung einer Zonen- bzw. Oktavenreihe

[100]	. . . . ⤨	[110]
1/1	. . . . $\sqrt{2/1}$	2/1

durchaus auch als mathematischer Pyramidenwürfel beschreiben, auch wenn dieser als Kristall wegen seines irrationalen Verhältnisses von $\sqrt{2/1}$ am Achsenkreuz in der Natur nicht vorkommen kann.



Der Schnitt durch die Achsenebene eines solchen mathematischen Körpers zeichnet sich dadurch aus, daß alle Begrenzungspunkte auf dem Umkreis des Quadrates liegen und somit ein regelmäßiges Achteck bilden. Auch haben dementsprechend alle äußeren Begrenzungswinkel in dieser Ebene den gleichen Wert von 135^0.

Dieser Körper steht mit seinem Begrenzungswinkel von 135^0 innerhalb der Zonenreihe genau in der geometrischen Mitte von 90^0 und 180^0 der beiden Grenzkörper. Entsprechend ist auch der Umkehrungspunkt ⤨ der Oktaven-

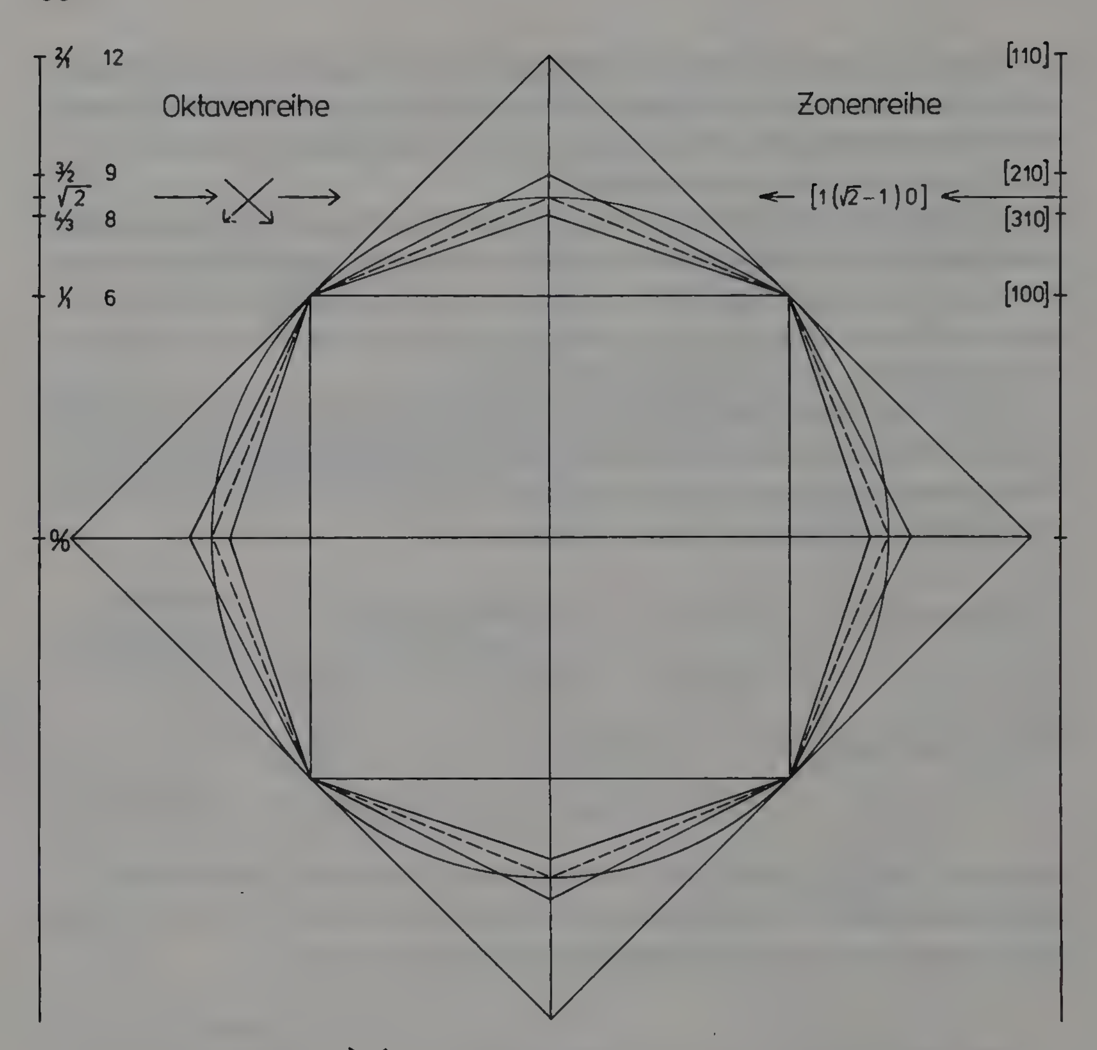
reihe das geometrische Mittel des Oktavenraumes. Er stellt somit eine Besonderheit innerhalb der vorliegenden Zonenreihe dar, da er der einzige Pyramidenwürfel ist, dem nicht ein anderer komplementär zugeordnet werden kann und der sich sozusagen selbst ergänzt.

In der Kristallographie ist bekannt, daß dieses regelmäßige Achteck als kristallographisches Strukturelement in dieser Zonenreihe wegen der am Achsenkreuz sich bildenden Irrationalität nicht auftreten kann. Aus diesem Grunde läßt es sich auch nicht in ein harmonikales Verhältnis bringen, wenn man seinen stereometrischen Hintergrund berücksichtigt.

Alle bisher behandelten Schnitte in der Achsenebene der kristallinen Pyramidenwürfel stellen prinzipiell gleichseitige und symmetrische Achtecke dar. Das regelmäßige Achteck ist hier ein Grenzfall, da alle acht Punkte auf der Umkreislinie des Quadrates liegen. Man kann nun

die Zonenreihe	Würfel	Pyramidenwürfel		Rhomben-dodekaeder
	[100]	[310]	[210]	[110]
und die Oktavenreihe	1/1	4/3	3/2	2/1
	Prim	Quarte	Quinte	Oktave

sowie den Kreuzungspunkt ⤫ als regelmäßiges Achteck in einer einzigen zweidimensionalen Figur darstellen, die sich ohne weiteres in die dritte Dimension transponieren läßt (siehe die Figur der nächsten Seite).



Der Kreuzungspunkt ✕ der vorliegenden Zonen- und Oktavenreihe läßt sich ergänzend zu den bisherigen Ausführungen auch noch dadurch beschreiben, daß man versucht, das geometrische Mittel des Oktavenraums mit rationalen Zahlenverhältnissen immer weiter einzuengen.

Man beginnt mit den beiden wichtigsten Pyramidenwürfeln [210] und [310] und den ihnen entsprechenden harmonikalen Intervallen. Es schließen sich nach innen die beiden Pyramidenwürfel [520] und [730] an, die harmonikal umgewandelt 7/5 und 10/7 entsprechen.

Zonenreihe:	[100]	... [310]	[520]	[1($\sqrt{2}$−1)0]	[730]	[210]	... [110]
Oktavenreihe:	1/1	... 4/3	7/5	$\sqrt{2}$/1	10/7	3/2	... 2/1
				✕			
Winkelgrad α:	180°	... 143,1°	136,4°	135°	133,6°	126,9°	... 90°
			└—20–21–29—┘				

Die Kristallindizes [520] und [730] lassen sich durchaus im kubischen Kristallsystem in der Literatur bei verschiedenen Mineralien nachweisen, wobei der erstere sogar noch in der Kristallform dominieren kann.

Vergleicht man das Auftreten so hoher Kristallindizes wie [520] und [730] gegenüber den zahlenmäßig einfacheren [210] und [310], sind die letzteren sehr viel häufiger anzutreffen. Es gilt allgemein, daß, je höher die Zahlen in den Kristallindizes sind, desto seltener auch ihr Vorkommen in der Kristallwelt ist.

Die beiden Pyramidenwürfel [520] und [730] können durch Winkelmessungen eindeutig voneinander abgegrenzt werden, da immerhin eine Winkeldifferenz von knapp 3^0 vorliegt. Auch die beiden Intervalle 7/5 und 10/7 lassen sich, am Monochord als Längenverhältnisse eingestellt, über das Gehör noch voneinander unterscheiden.

Damit läßt sich das geometrische Mittel $\sqrt{2}$, sowohl stereometrisch über diese Kristallindizes [520] und [730] als auch harmonikal über die entsprechenden Intervalle 7/5 und 10/7 noch meßbar, einmal mechanisch über den Winkelmesser und zum anderen physiologisch über das Gehör am Monochord in einem komplementären Vergleich erfassen und mit rationalen Zahlenverhältnissen eingrenzen.

Die Beziehung von pythagoreischen Dreiecken und zugehörigen Intervallen unter Einbeziehung des Kreuzungs- und Umkehrpunktes ⤩ innerhalb einer Reihe läßt sich noch weiter aufschlüsseln, indem man die allgemeine Formel, die zu den pythagoreischen Zahlentripeln führt, genauer untersucht.

Es sind verschiedene Formeln zur Bildung pythagoreischer Zahlen aus der älteren und neueren Zeit bekannt. PROKLOS schreibt den Pythagoreern eine mathematische Methode zu, die von ungeraden Zahlen, und PLATON eine ähnliche Methode, die jedoch von geraden Zahlen ausgeht[1].

Pythagoreische Formel: $m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$

Beispiele (ungerade):	3	4	5	m = 3
	5	12	13	m = 5
	7	24	25	m = 7

Platonische Formel: $(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$

Beispiele (gerade)	4	3	5	m = 2
	8	15	17	m = 4
	12	35	37	m = 6

1) O. Becker, Das mathematische Denken der Antike, Leipzig 1966[2], 53.

Die beiden Methoden sind sehr ähnlich, da sie sich ineinander überführen lassen.

Es gibt außerdem noch weitere Modifikationen dieser Formeln zur Bildung pythagoreischer Zahlen, so von EUKLID, MASERES, COLLINS, DICKSON, MARTIN u. a., die sich jedoch alle auf das folgende Grundschema zurückführen lassen. Wie Martin nachgewiesen hat[1], entsteht es dadurch, daß in die obigen Gleichungen eine zweite Variable (statt der Zahl 1) eingeführt wird.

	$(m^2-n^2)^2$	$+ (2mn)^2$	$= (m^2+n^2)^2$	Zahlenpaar m/n $(m > n)$
Beispiele:	3	4	5	2/1
	8	6	10	3/1
	5	12	13	3/2
	24	10	26	5/1
	15	8	17	4/1
	16	30	34	5/3

Aus den wenigen angeführten Beispielen, wie sie sich aus der Anwendung der letzten Formel ergeben, ist schon erkennbar, daß zu jedem Zahlenpaar ein pythagoreisches Grundtripel gehört und zusätzlich jeweils ein zweites Zahlenpaar zu einer kathetenvertauschten Verdopplung des Grundtripels führt. Es gibt also zu jedem pythagoreischen Tripel zwei bestimmte Zahlenpaare von konstantem Zahlenverhältnis. So bilden die Vielfachen der Zahlenpaare doch das gleiche pythagoreische Zahlendreieck.

	$(m^2-n^2)^2$	$+ (2mn)^2$	$= (m^2+n^2)^2$	m/n
Beispiele:	3	4	5	2/1
	12	16	20	4/2
	8	6	10	3/1
	32	24	40	6/2

Diesen mathematischen Zusammenhang von Zahlenpaaren und pythagoreischen Tripeln kann man auch in die Dreidimensionalität übertragen. Das Zahlenpaar (m/n) läßt sich austauschen gegen die Zahlen der Kristallindizes (h/k) in der Zonenreihe von

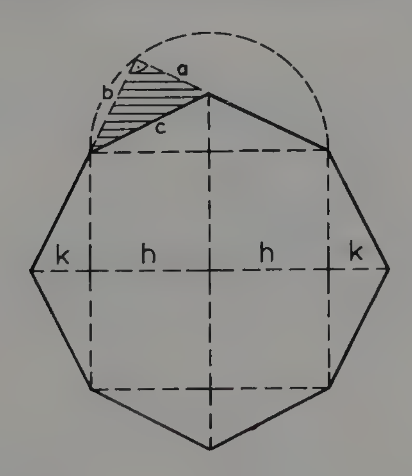
1) A. Martin, in: The Mathematical Magazine, 1891, Vol. II, Nr. 5, 69; E. S. Loomis, The Pythagorean Proposition, Ann Arbor 1968[2]; M. Päsler, Pythagoreische Zahlen, in: Physikalische Blätter 33, 1977, Nr. 6, 453; W. Sierpinski, Pythagorean Triangles, New York 1962.

Würfel — Pyramidenwürfel — Rhombendodekaeder
[100] [hk0] [110]

An den ausführlich dargestellten Pyramidenwürfeln [hk0] läßt sich diese stereometrische Übertragung auf einfache Weise nachvollziehen, da über die Winkelfunktionen ein direkter Bezug zu den pythagoreischen Dreiecken besteht. Dieses mathematische Prinzip gilt aber auch in anderen Kristallzonenreihen, in denen pythagoreische Zahlen auftreten (siehe Seite 86).

Die Anwendung und Übertragung der pythagoreischen Zahlen auf den Raum der Kristalle wurde, wenn auch in einer vollkommen anderen mathematischen Form, von LÜCK beschrieben[1]. In diesem Beitrag wird besonders deutlich, daß die Möglichkeit, die pythagoreischen Zahlen zur Beschreibung eines harmonikal-strukturierten Raumes heranzuziehen, bisher nicht erkannt wurde. Es kennzeichnet jedoch die harmonikale Bedeutung dieser pythagoreischen Zahlen, daß sie sich, wie ausführlich entwickelt wurde, innerhalb eines oktavbegrenzten Raumes über das Achsenkreuz in Intervalle umwandeln lassen.

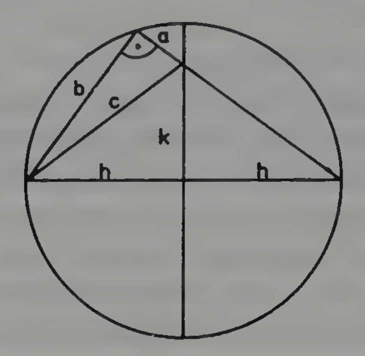
Im bisher behandelten Schnitt durch die Achsenebene der Pyramidenwürfel läßt sich jedes Zahlenpaar (h/k), das hier zahlenmäßig mit dem Kristallindex gleichzusetzen ist, stereometrisch einordnen. Der erste Buchstabe h stellt die Beziehung zur eingeschriebenen Würfelkante und der zweite Buchstabe k die Verlängerung des Achsenkreuzes („Tiefe des Raumes") dar.



Greifen wir aus diesem Gesamtzusammenhang des Achsenschnittes durch den Pyramidenwürfel das Kreis-Schema heraus, das die mathematische Beziehung zwischen dem Zahlenpaar (h/k) und dem pythagoreischen Dreieck

1) R. Lück, Pythagoreische Zahlen für den dreidimensionalen Raum, in: Physikalische Blätter 35, 1979, Nr. 2, 72-75.

a–b–c darstellt, so ergibt sich für das Zahlenpaar (h/k):

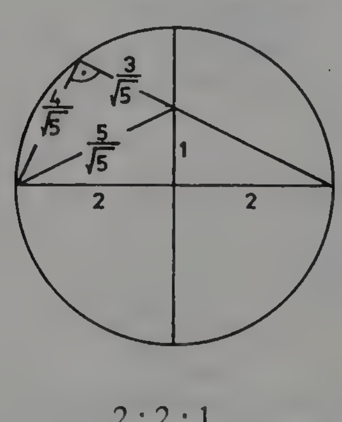


$$\left(\frac{h^2 - k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)^2 + \left(\frac{2hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)^2 = \left(\frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dabei zeigt sich auch, daß von zwei zusammengehörigen Zahlenpaaren eines zu einem pythagoreischen Grundtripel führt und das andere zu dessen kathetenvertauschter Verdopplung.

Beispiel: Zahlenpaar (2/1), Grundtripel 3–4–5

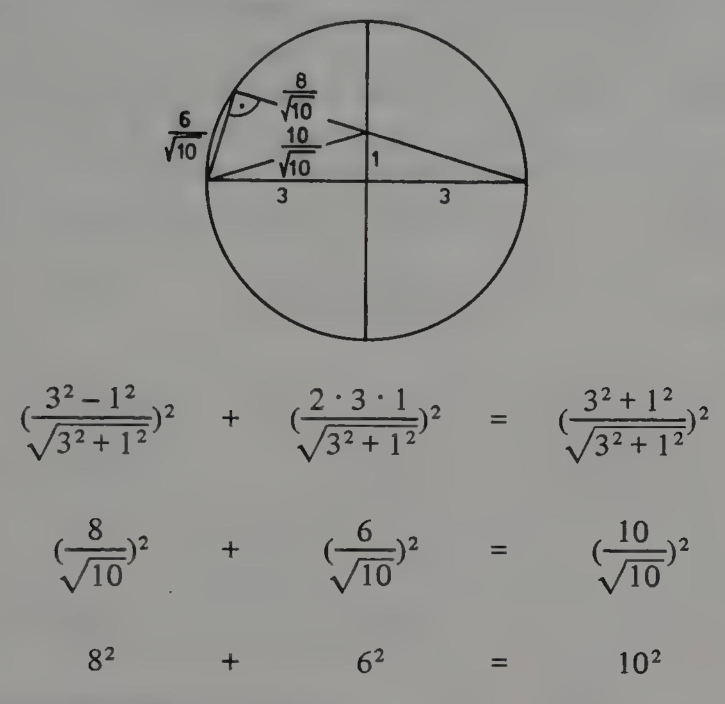


$$\left(\frac{2^2 - 1^2}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right)^2 = \left(\frac{2^2 + 1^2}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Zahlenpaar (3/1), abgeleitetes Tripel 8–6–10



$$\left(\frac{3^2-1^2}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)^2 \quad + \quad \left(\frac{2\cdot 3\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)^2 \quad = \quad \left(\frac{3^2+1^2}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)^2$$

$$\left(\frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2 \quad + \quad \left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 \quad = \quad \left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$8^2 \quad + \quad 6^2 \quad = \quad 10^2$$

Die verschiedenen Zahlenebenen

– der Kristallindizes der Pyramidenwürfel [hk0] bzw. der ihnen entsprechenden Zahlenpaare (h/k),

– der Winkelfunktionen bzw. der ihnen zugeordneten pythagoreischen Tripel, einmal als Grunddreieck und zum anderen als kathetenvertauschte Verdopplung und

– der Intervalle

lassen sich nun über den Kreuzungspunkt ⤨ zweier stereometrischer Reihen durch das auf Seite 72 stehende Schema veranschaulichen.

	Würfel	← flacher		Pyramidenwürfel		steiler →		Rhombendodekaeder
Zonenreihe hk0:	100	710	· 510	· 310	210	· 320	· 430	110
Zahlenpaar h/k:		7/1	5/1	3/1	2/1	3/2	4/3	
Oktavenreihe $\frac{h+k}{h}$:	1/1	8/7	6/5	4/3	3/2	5/3	7/4	2/1
Winkelfunktion $\cos_a$:		24/25	12/13	4/5	3/5	5/13	7/25	
pythag. Zahlen:								
$h^2 - k^2$:		48	24	8	3	5	7	
$2hk$:		14	10	6	4	12	24	
$h^2 + k^2$:		**50**	**26**	**10**	**5**	**13**	**25**	
		Gerade		⤫		Ungerade		

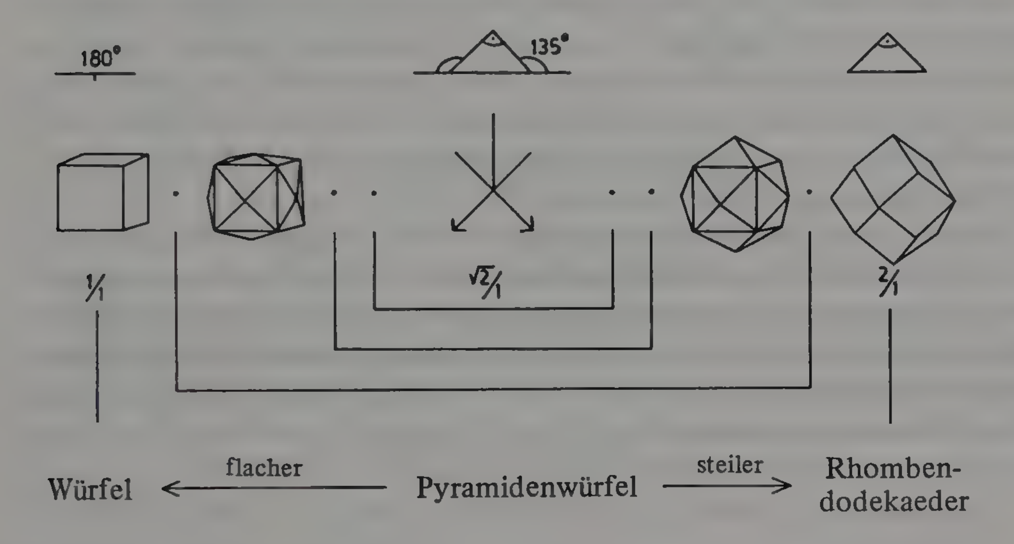
Beispiel für die Entwicklung neuer Kristallindizes durch „Komplikation"
(aus der Addition zweier benachbarter Kristallindizes)

Zonenreihe hk0:	100	610	· 410	530	· 750	· 110
Zahlenpaar h/k:		6/1	4/1	5/3	7/5	
Oktavenreihe $\frac{h+k}{h}$:	1/1	7/6	5/4	8/5	12/7	2/1
Winkelfunktion $\cos_a$:		35/37	15/17	8/17	12/37	
pythag. Zahlen:						
$h^2 - k^2$:		12	8	30	70	
$2hk$:		35	15	16	24	
$h^2 + k^2$:		**37**	**17**	**34**	**74**	
		Ungerade	⤫	Gerade		

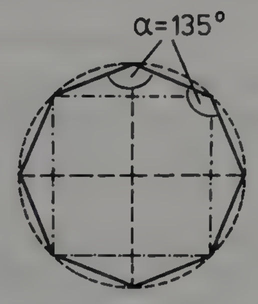
Als neues zahlentheoretisches Element für die Umkehrung ⤨ zweier Teilbereiche kommt das Prinzip von *gerade* und *ungerade* hinzu. Es ergibt sich zwangsläufig aus der Verdopplung der pythagoreischen Tripel; es hat jedoch seinen Ursprung in der stereometrischen Ergänzung zweier komplementärer Winkel am gleichen pythagoreischen Dreieck oder harmonikal in der Teilung des Oktavenraums in zwei sich ergänzende Intervalle.

Fassen wir das Wesentliche um den Kreuzungspunkt zusammen:

1) Innerhalb der bisher behandelten Zonenreihe



kommt der Begrenzungswinkel von 135° und damit auch das regelmäßige Achteck



wegen der am Achsenkreuz auftretenden Irrationalität nicht vor.

2) Der Kreuzungspunkt ⤨ dieser Zonenreihe läßt sich stereometrisch als ein Pyramidenwürfel beschreiben, der als einzige Ausnahme „in sich komplementär" ist ($\alpha = \beta$).

3) Ein solcher Pyramidenwürfel kann in der Kristallwelt nicht vorkommen, da sein Kristallindex einen irrationalen Wert hätte: $[(\sqrt{2} + 1)\,1\,0]$ oder $[1\,(\sqrt{2} - 1)\,0]$.

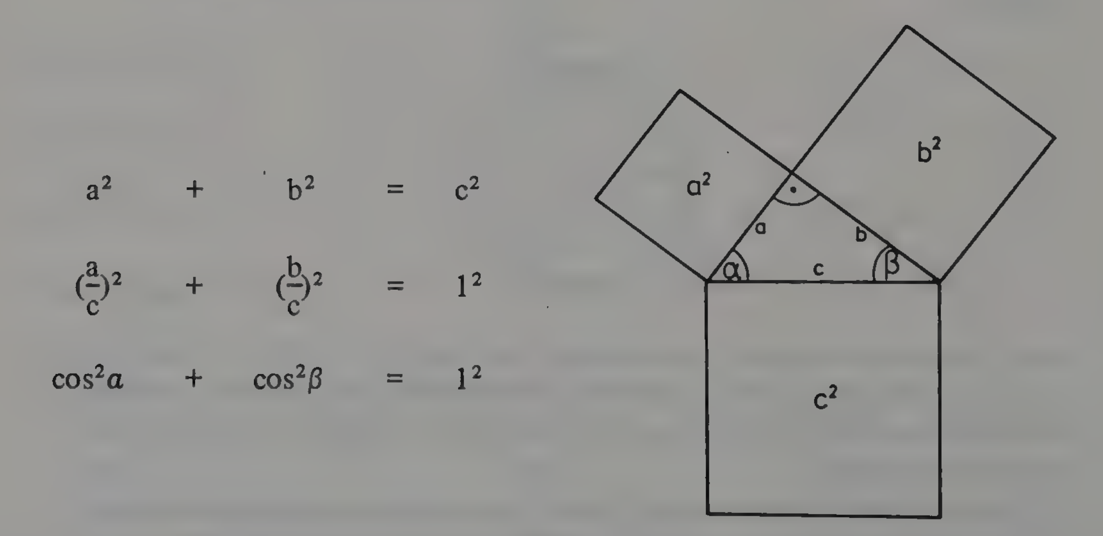
4) Der Kreuzungspunkt ⤨ stellt in der Oktavenreihe die stereometrische Umwandlung des geometrischen Mittels $\sqrt{2}$ innerhalb des Oktavenraums dar.

Für die Kristallographie besitzt ein irrationaler Körper wie der Pyramidenwürfel $[1(\sqrt{2}-1)0]$ allenfalls theoretisches Interesse, da er bekanntlich in der Natur nicht vorkommen kann. Für eine Untersuchung, die der Idee der stereometrischen und harmonikalen Komplementarität nachgeht, bilden dieser Pyramidenwürfel und das durch seinen Schnitt in der Achsenebene entstehende regelmäßige Achteck den Schlüssel zum besseren Verständnis des geometrischen Mittels als Kreuzungspunkt einer Oktavenreihe.

Die Thematik des Kreuzungspunktes ⤨ zweier stereometrischer bzw. harmonikaler Reihen wird meines Wissens weder in den Fachbüchern der Mathematik und der Kristallographie[1] noch in der Musiktheorie behandelt und wurde deshalb hier ausführlich beschrieben. Der einzige Hinweis auf diesen Kreuzungspunkt oder das Pfeilenkreuz ⤨ kommt von harmonikaler Seite, indem von THIMUS es vor einem geschichtlichen Hintergrund zur enharmonischen Differenzierung von Tonleitern gebraucht.

Nachdem die pythagoreischen Zahlen und ihre harmonikale Bedeutung mit ihren komplementären Beziehungen innerhalb des Oktavenraumes detailliert beschrieben sind, kann jetzt auch die allgemeine Formel vorgestellt werden, die es erlaubt, für jedes rechtwinklige und rationale Dreieck die beiden komplementären Intervalle zu entwickeln und innerhalb eines harmonikal-strukturierten Raumes einzuordnen.

Pythagoreischer Lehrsatz:



1) Vgl. W. Kleber, Einführung in die Kristallographie, Berlin 1965[8], 150; V. Goldschmidt, Ueber Harmonie und Complication, Berlin 1901, 11. Sowohl bei Kleber als auch bei Goldschmidt liegt keine Umkehrung im harmonikalen Sinne vor, sondern lediglich eine reziproke und symmetrische Spiegelung.

Harmonikal-stereometrische Ableitung der Intervalle
aus einem pythagoreischen Dreieck

$$\frac{a+b+c}{a+c} \otimes \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{2}{1}$$

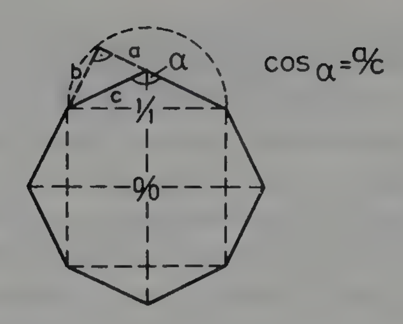
Die harmonikale Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes bietet die Möglichkeit, den Raum mit anderen Strukturelementen – den Intervallen – aufzuschließen, als dies normalerweise mathematisch[1] der Fall ist. Der Begriff *Intervall* „Zwischenraum“[2] bekommt damit durch diese stereometrische Übertragung auf das Achsenkreuz eines harmonikalen Raumes einen neuen Inhalt. Der eigentliche Wert dieser Formel liegt jedoch darin, daß damit ein Ordnungsprinzip verbunden ist, das sich sowohl auf die pythagoreischen Zahlen als auch auf die Intervalle anwenden läßt.

Die stereometrische und harmonikale Umwandlung der pythagoreischen Dreiecke in den Oktavenraum geht von bestimmten Voraussetzungen aus, die hier noch einmal zusammengefaßt werden:

1) Als Grundlage für diese Umwandlung dient das rechtwinklige und rationale Dreieck, dessen komplementäre Winkel sich zwei verschiedenen kristallinen Pyramidenwürfeln zuordnen lassen und sich somit auch im Raum komplementär ergänzen.

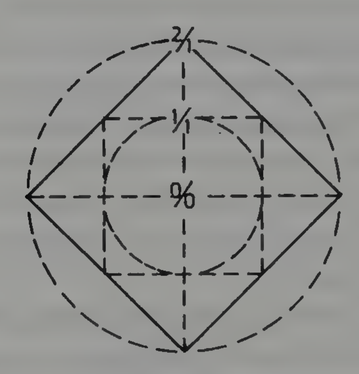
2) Die äußere Begrenzung des Achsenkreuzes im Schnitt der Achsenebene eines Pyramidenwürfels wird durch einen Winkel gebildet, der einem pythagoreischen Zahlendreieck zugeordnet werden kann.

1) „Pythagoras im Raum“, in: M. Simon, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert, Leipzig 1906, 112; W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz, Leipzig 1912, 30.
2) H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 33; ders., Akroasis. Die Lehre von der Harmonik der Welt, Basel 1964[2], 122.



Aus der Größe des Winkels wie auch direkt aus dem entsprechenden pythagoreischen Zahlentripel läßt sich das harmonikale Verhältnis – das Intervall – am Achsenkreuz bestimmen.

3) Die Beziehung des Rhombendodekaeders zum zugrundegelegten Würfel bildet am Achsenkreuz die beiden Grenzpunkte 1/1 und 2/1, die den Oktavenraum umfassen.

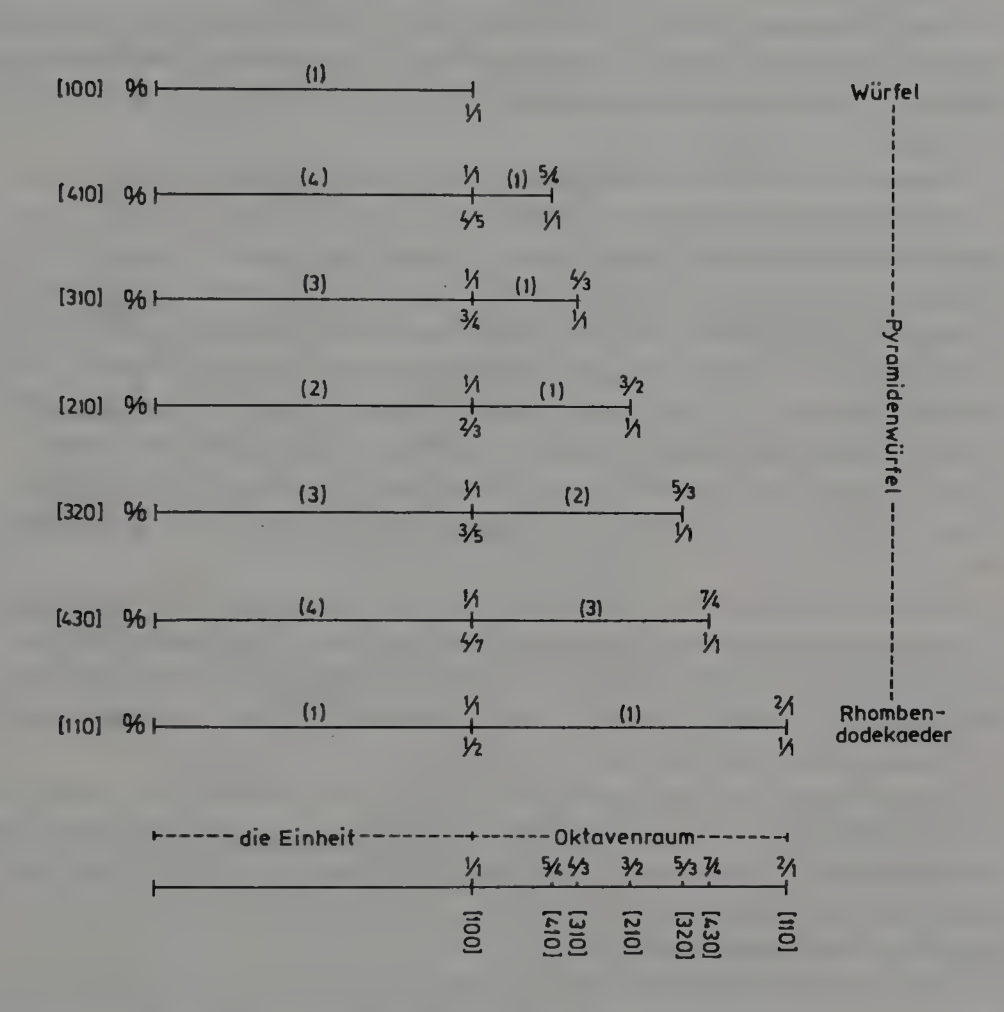


Der Schnitt durch die Achsenebene ist durch die Verdopplung des Achsenkreuzes gekennzeichnet. Sämtliche Intervalle lassen sich über diese Zonen- und Oktavenreihe in der ersten (Achsenkreuz), der zweiten (Achsenschnitt) und der dritten Dimension (Pyramidenwürfel) harmonikal und stereometrisch darstellen.

4) Nur rationale rechtwinklige Dreiecke bzw. rationale pythagoreische Zahlentripel lassen sich in harmonikale Proportionen umwandeln, die sich komplementär im Oktavenraum ergänzen.

In der bisherigen Form der Intervalldarstellung sind die Intervalle in den Oktavenraum 1/1 – 2/1 eingebunden, wobei sich ein Zahlenverhältnis >1 ergibt. Es kam vor allem darauf an, die Beziehung der Kristallindizes oder der entsprechenden Zahlenpaare zu bestimmten Intervallen herauszustellen. So kann z. B. ein Pyramidenwürfel mit dem Kristallindex [210] oder das entsprechende Zahlenpaar (2/1) nur zum Intervall der Quinte führen. Es ist jedoch prinzipiell gleich, ob man von einem Verhältnis 3:2 oder 2:3 ausgeht, wenn man den jeweiligen Bezugspunkt innerhalb der Zonen- bzw. Oktavenreihe berücksichtigt.

Die Zahlen der Kristallindizes lassen sich somit auch in die reziproke Form der Intervalle umwandeln, wie dies an einigen ausgewählten Beispielen dargestellt wird.



Bisher wurde der dem Pyramidenwürfel eingeschriebene Würfel als Einheit 1/1 angenommen, über die das Intervall (h + k)/h hinausgeht. Man kann aber auch die Begrenzung des Körpers als Einheit 1/1 nehmen, wobei der Würfel die reziproke Form des Intervalls h/(h + k) bildet. Bei dieser Form der Darstellung wird stärker als vorher der Kristall als Einzelkörper gesehen, während die bisherige Sicht den Zusammenhang der Zonen- und Oktavenreihe miteinbezieht. Die bisher gewählte Form, die Oktavenreihe in die Grenzen des Oktavenraums 1/1 – 2/1 einzuordnen, hat den Vorteil der größeren Anschaulichkeit in den Kristallkörpern. Es läßt sich jedoch gerade am Beispiel der harmonischen Teilung und der harmonikalen Interpretation der Spektrallinien des

Wasserstoffatoms zeigen, daß die reziproke Form der Intervalle unter Umständen besser geeignet ist, einen bestimmten zahlentheoretischen Zusammenhang aufzuschlüsseln.

Die Darstellung wurde bisher auf relativ einfache Zahlentripel beschränkt. Es läßt sich zeigen, daß auch die Natur – am Beispiel der Kristalle – nach dem Prinzip der kleinen Zahlen vorgeht. Man kann allgemein sagen, daß, je niedriger die Zahlen der Kristallindizes sind, desto häufiger auch ihr Auftreten in der Natur ist.

So kommen höhere pythagoreische Dreiecke verhältnismäßig selten in der entsprechenden vollflächigen Grundform vor, sondern meist nur noch in der Kombination mehrerer Körperformen in einer Zonenreihe. Dagegen ist die Dominanz des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 im Vergleich zu den nächstfolgenden Zahlentripeln innerhalb einer Zonenreihe ausgesprochen groß.

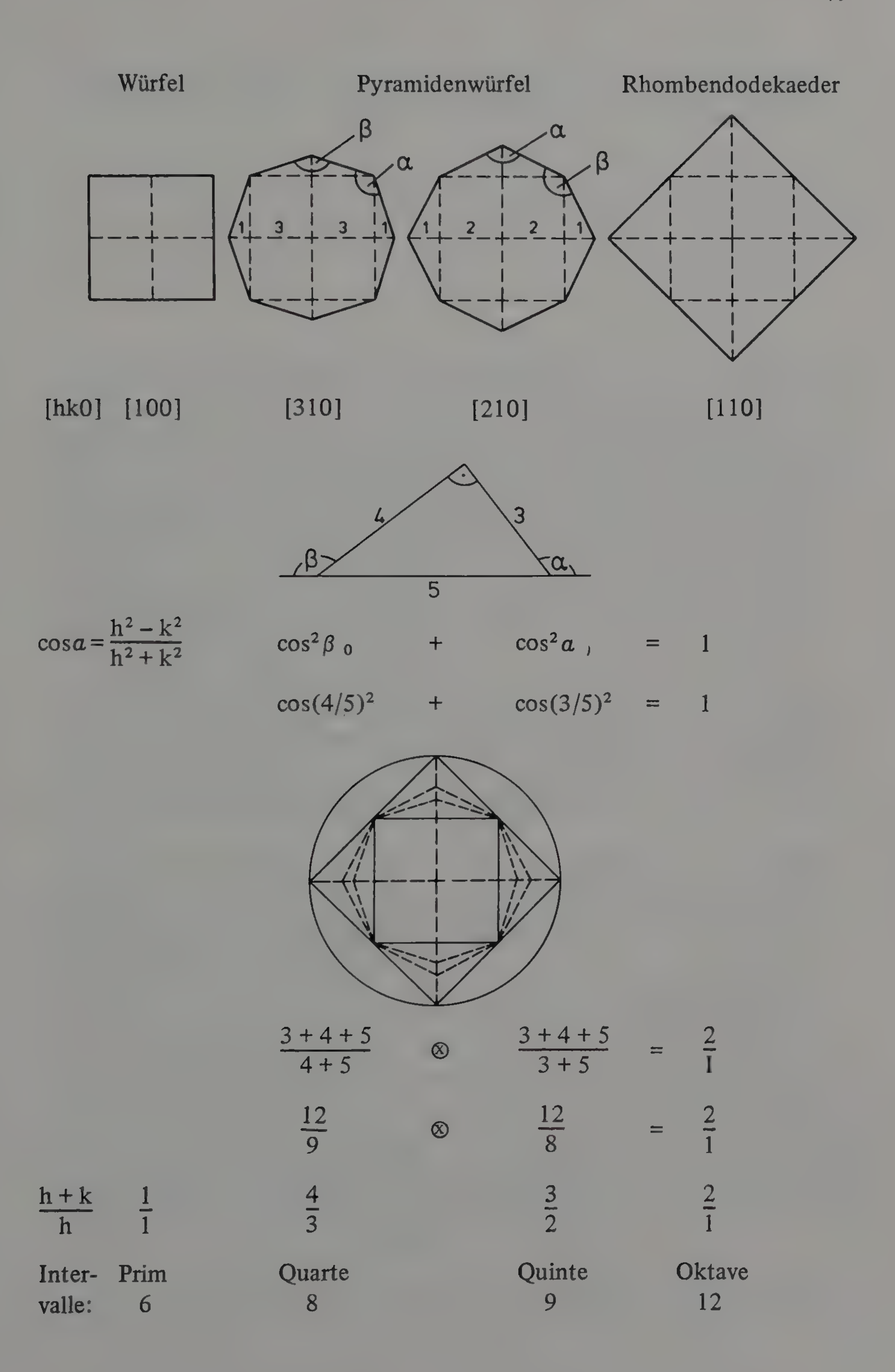
In jedem Kristallmuseum gibt es Kristalle wie Pyrit, Granat, Fluorit, Zinkblende, Bleiglanz u. a., an denen man in der Regel – außer bei den Grundkörpern wie Würfel, Oktaeder, Tetraeder – sofort das pythagoreische Dreieck 3–4–5 finden kann, während dies für die darauffolgenden pythagoreischen Dreiecke selten und nur mit besonderer Kenntnis und Winkelmessung möglich ist.

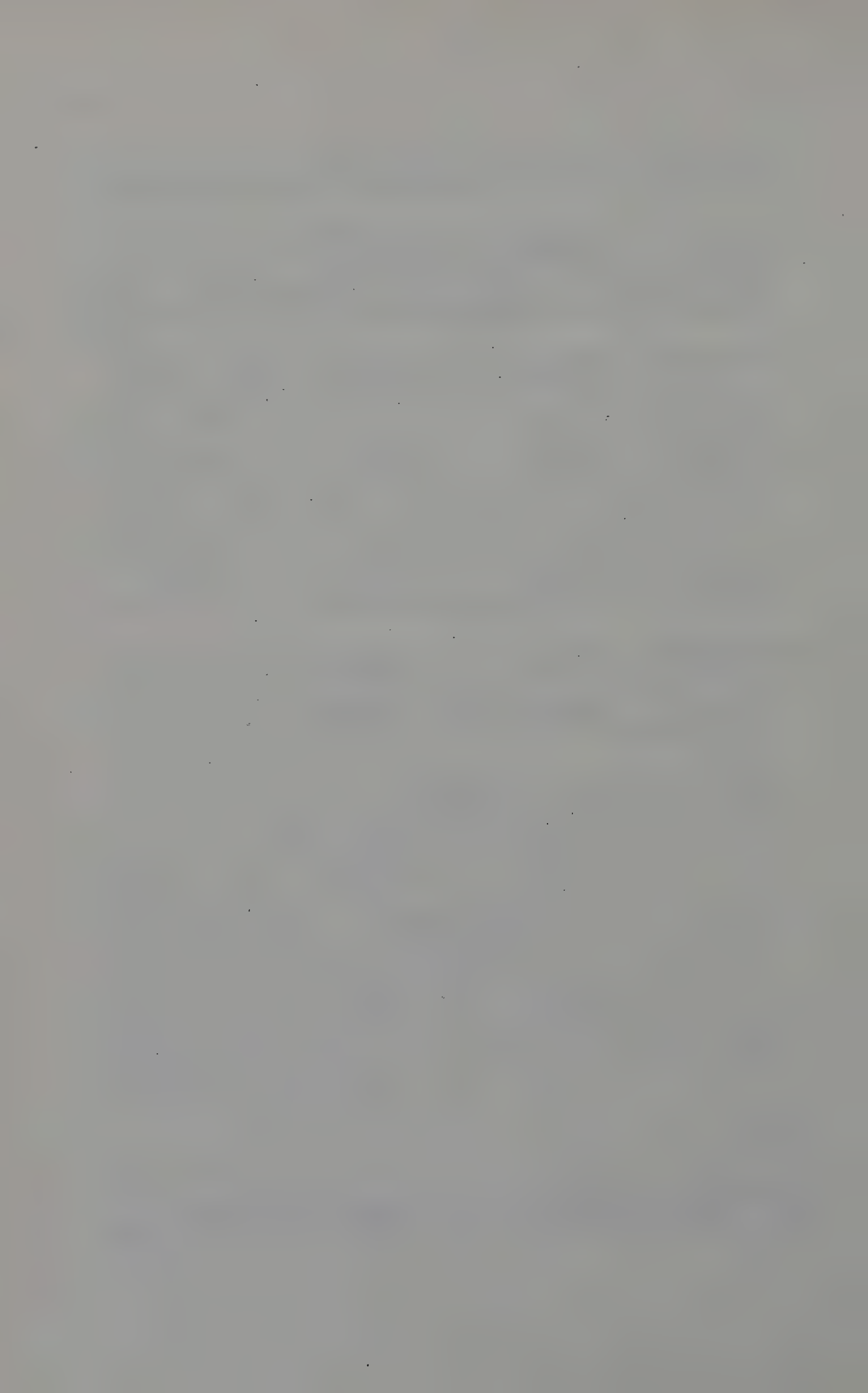
Es gibt für einige Mineralien quantitative Untersuchungen über das Vorkommen der verschiedenen Kristallkörper, die alle darauf hinauslaufen, daß die einfachsten Kristallindizes auch am häufigsten vorkommen. Die Rangordnung der einfachen Zahlen drückt sich also ganz besonders in der Häufigkeit ihres Vorkommens in der Natur aus[1].

Das gibt zumindest schon einen Hinweis auf eine Beziehung zur Harmonik bzw. Musiktheorie, wo ebenfalls die Bedeutung eines Intervalls von den einfacheren zu den komplizierteren Zahlenverhältnissen rasch abnimmt. Dies war auch der Grund dafür, daß zunächst das pythagoreische Dreieck 3–4–5 so ausführlich behandelt wurde.

Abschließend sollen die vielfältigen geometrischen, stereometrischen und harmonikalen Beziehungen des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 noch einmal in einer übersichtlichen Darstellung (auf Seite 79) zusammengefaßt werden. Gerade dieses Dreieck, das sowohl in den alten Kulturen als auch im heutigen geometrischen Verständnis einen breiten Raum einnimmt, prägt sich in den (kubischen) Kristallkörpern, die hier als „Beispiele aus der Natur" herangezogen werden, besonders stark aus.

1) V. Goldschmidt, Ueber Entwickelung der Krystallformen, in: Zeitschrift für Krystallographie 28, 1897, 11; ders., Ueber Harmonie und Complication, Berlin 1901, 24.


Würfel
Pyramidenwürfel
Rhombendodekaeder
β
α
α
β
1 3 3 1
1 2 2 1
[hk0] [100]
[310]
[210]
[110]
4
3
β
α
5
cosa = (h² – k²)/(h² + k²)
cos²β₀ + cos²a₁ = 1
cos(4/5)² + cos(3/5)² = 1
(3 + 4 + 5)/(4 + 5) ⊗ (3 + 4 + 5)/(3 + 5) = 2/I
12/9 ⊗ 12/8 = 2/1
(h + k)/h 1/1 4/3 3/2 2/1
Inter- Prim Quarte Quinte Oktave
valle: 6 8 9 12



PYTHAGOREISCHE ZAHLEN IM KUBISCHEN KRISTALLSYSTEM

Pythagoreische Zahlentripel sind gerade wegen der Möglichkeit ihrer harmonikalen Interpretation von besonderem Interesse. Sie lassen sich über ihre stereometrische Einordnung am Achsenkreuz sowie über ihre harmonikale Transformation zur Beschreibung eines Raumes heranziehen, der an andere Kriterien gebunden ist, als dies normalerweise beschrieben wird. Dies gilt für alle pythagoreischen Zahlentripel, wie es im bisherigen Teil dieser Abhandlung ausführlich dargestellt wurde. Es ist deshalb wichtig, den konkreten Nachweis ihres strukturellen Vorkommens innerhalb eines abgeschlossenen Kristallsystems zu behandeln, da man so am ehesten das harmonikale Prinzip in einem größeren Zusammenhang erkennt.

Das reguläre oder kubische Kristallsystem bietet hierfür die besten Voraussetzungen, da es die strukturell einfachste von insgesamt sieben verschiedenen Kristallklassen ist. Nirgendwo lassen sich pythagoreische Zahlen einfacher und direkter nachweisen als in diesen regulären Kristallkörpern, die in zahlreichen Modifikationen und auch Kombinationen untereinander in der Natur anzutreffen sind.

Es gibt meines Wissens weder in der kristallographischen noch in der mathematischen Literatur[1] eine Untersuchung von Körpern, die das konkrete morphologische Auftreten pythagoreischer Zahlentripel in einen übergeordneten und harmonikalen Zusammenhang bringt.

So kommt es in diesem Kapitel vor allem darauf an, das strukturelle Vorkommen der pythagoreischen Zahlentripel an den verschiedenen Kristallkörpern des kubischen Systems zu untersuchen. Bei einigen Körpern dieses Systems wie z. B. dem Pyramidenwürfel oder dem Pentagondodekaeder sind die pythagoreischen Zahlentripel bzw. die ihnen zugeordneten Winkelfunktionen leicht zu berechnen. Bei den komplizierter strukturierten Körpern, wie dem Hexakistetraeder, dem Hexakisoktaeder, dem tetraedrischen Pentagondodekaeder, dem Pentagonikositetraeder und dem Disdodekaeder, sind schon detaillierte Berechnungen erforderlich, um diese Winkel zu bestimmen.

1) Vgl. R. Lück, Pythagoreische Zahlen für den dreidimensionalen Raum, in: Physikalische Blätter 35, 1979, 72.

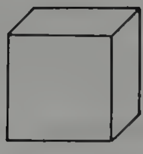
Eine umfassende harmonikale Interpretation der regulären Kristallkörper läßt sich allerdings erst vornehmen, wenn das Auftreten der pythagoreischen Zahlen in seiner ganzen Vielfalt untersucht ist. Es ist hier auch nicht möglich, das Prinzip der pythagoreischen Zahlen auf weitere Kristallsysteme auszudehnen, da dies eine kristallographische Spezialisierung zur Folge hätte, die für das harmonikale Grundverständnis nicht notwendig ist.

Im folgenden soll zunächst auf das allgemeine Prinzip des Auftretens der pythagoreischen Zahlen eingegangen werden, daran anschließend die detaillierte Beschreibung einzelner Kristallkörper.

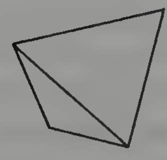
Von den insgesamt 15 verschiedenen Körpern des kubischen Kristallsystems treten in den folgenden 9 die pythagoreischen Zahlen in der äußeren Begrenzung des Achsenkreuzes direkt über den Begrenzungswinkel α auf: Pyramidenwürfel, Pentagondodekaeder, Pyramidentetraeder, Ikositetraeder, Hexakistetraeder, Hexakisoktaeder, tetraedrisches Pentagondodekaeder, Disdodekaeder und Pentagonikositetraeder. An zwei weiteren Körpern, dem Pyramidenoktaeder und dem Deltoiddodekaeder, können die pythagoreischen Zahlentripel aus Gründen, auf die noch ausführlich eingegangen werden wird, nicht auftreten.

Die restlichen vier Körper, der Würfel, das Oktaeder, das Tetraeder und das Rhombendodekaeder, bilden die Grenzkörper der jeweiligen Zonenreihen des kubischen Kristallsystems, innerhalb derer die Entwicklung und Differenzierung der Zwischenkörper erfolgt. Darüber hinaus stellen der Würfel, das Oktaeder und das Tetraeder Grundkörper dar, während das Rhombendodekaeder sich aus diesen drei Grundkörpern durch die rationale Erweiterung bestimmter Achsendiagonalen ableiten läßt. Dieses Prinzip wurde ausführlich am Würfel und an der Erweiterung bzw. Verdopplung seines rechtwinkligen Achsenkreuzes erläutert.

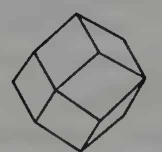
Grenzkörper



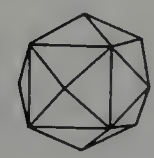
Würfel

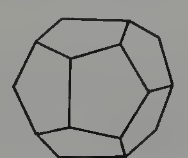

Tetraeder

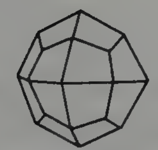

Oktaeder

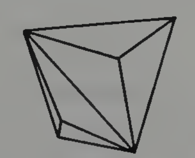

Rhombendodekaeder

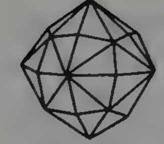
Zwischenkörper mit pythagoreischen Zahlen

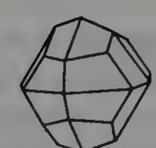

Pyramidenwürfel

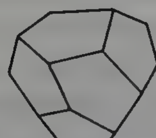

Pentagondodekaeder

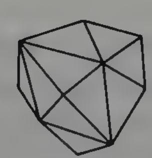

Ikositetraeder


Pyramidentetraeder


Hexakisoktaeder


Disdodekaeder

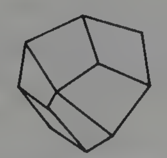

Tetr. Pentagondodekaeder


Hexakistetraeder

Pentagonikositetraeder

Zwischenkörper ohne pythagoreische Zahlen


Pyramidenoktaeder


Deltoiddodekaeder

Zahlentheoretisch heben sich die vier Grenzkörper Würfel [100], Tetraeder $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$, Oktaeder [111] und Rhombendodekaeder [110] allein schon dadurch von den anderen ab, daß in ihren Kristallindizes nur die Zahl *Eins* enthalten ist.

110

[110]

111

[111]

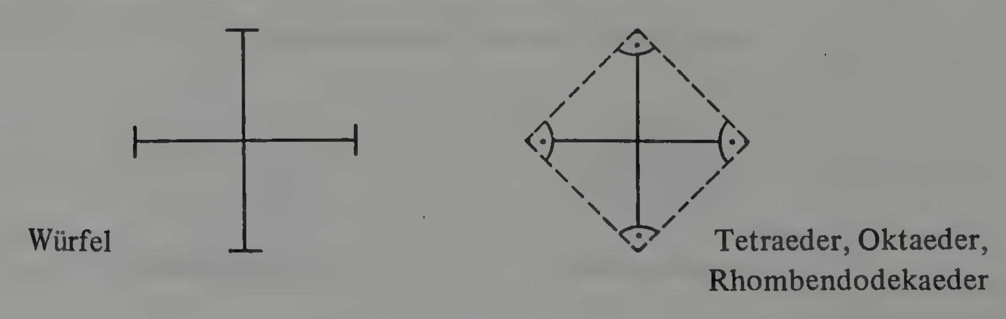
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$

$[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$

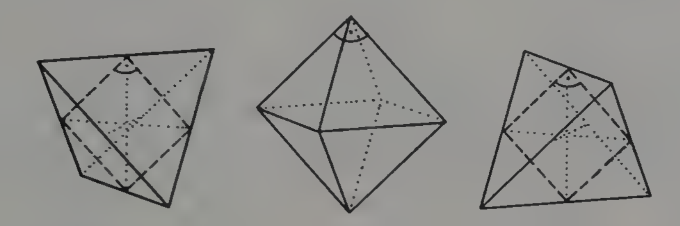
100

[100]

Warum die pythagoreischen Zahlendreiecke in den vier Grenzkörpern Würfel, Tetraeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder nicht auftreten können, hat noch einen sehr einfachen geometrischen Grund. Diese vier Körper zeichnen sich dadurch aus, daß sie innerhalb des orthogonalen Achsenkreuzes im Schnitt durch die Achsenebene ein Quadrat bilden. Der äußere Begrenzungswinkel beträgt beim Würfel 180^0 und bei den drei anderen Endkörpern einer Zonenreihe: Tetraeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder, jeweils 90^0.



Auf die beiden Grenzwinkel von 180° und 90° wurde bei der Darstellung der Zonenreihe vom Würfel zum Rhombendodekaeder schon ausführlich eingegangen. Der rechte Winkel am Oktaeder ergibt sich an den beiden gegenüberliegenden Kanten, die eine Oktaederspitze bilden. Am Tetraeder den rechten Winkel zu erkennen, macht dagegen zunächst einige Schwierigkeiten. In den mathematischen Tabellenwerken wird er in der Regel nicht erwähnt. Kristallographisch ordnet man in das Tetraeder genau wie in alle anderen kubischen Körper das rechtwinklige Achsenkreuz ein, wobei sich der Begrenzungswinkel von 90° ergibt. Verbindet man die jeweiligen Mittelpunkte der Tetraederkanten, bilden sie ein Quadrat in der Achsenebene.



Die Formen [111] und $[1\bar{1}1]$ des Tetraeders und ihre Beziehung zum Oktaeder

Man kann sich zum besseren geometrischen Verständnis den Zusammenhang von rechtem Winkel am Tetraeder und Achsenkreuz dadurch verdeutlichen, daß man sich das Oktaeder im Tetraeder vorstellt, da beide das gleiche Quadrat als Begrenzung der Achsenebene haben. Das Tetraeder wird kristallographisch mit dem Kristallindex $[\overline{111}]$ und das Oktaeder mit [111] gekennzeichnet, da sie in einer sich gegenseitig bedingenden Beziehung stehen, was die Projektion ihrer Flächen auf das Achsenkreuz betrifft (s. die obige Abbildung).

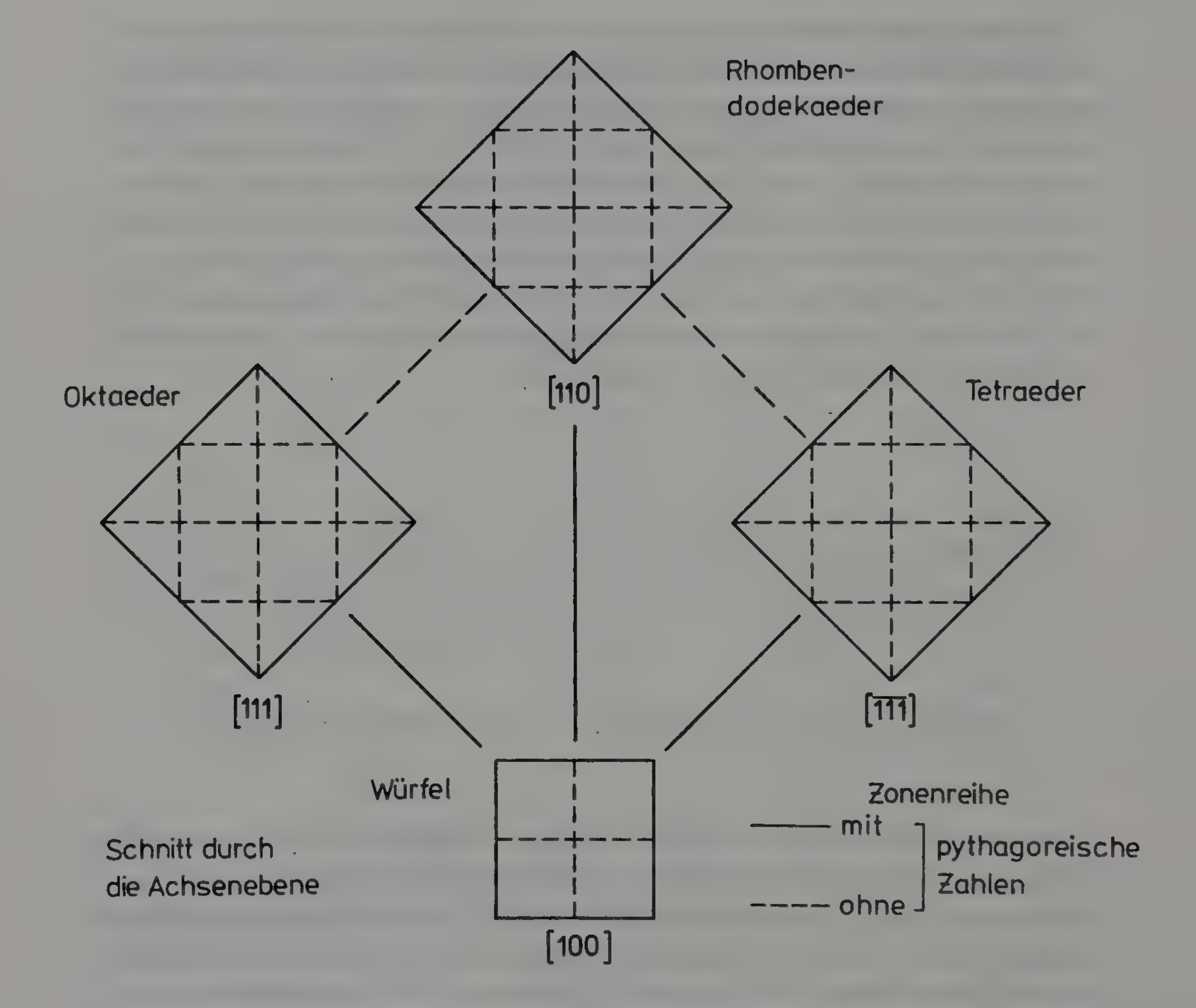
Der Würfel nimmt unter den vier Grenzkörpern eine Sonderstellung ein:

1) Er ist der einzige Körper, der sich kristallographisch mit einer einzigen Zahl beschreiben läßt: [100]. Die Null zählt hier nicht als Zahl.

2) Der Begrenzungswinkel in der Ebene des Koordinatensystems ist beim Würfel gleich 180°.

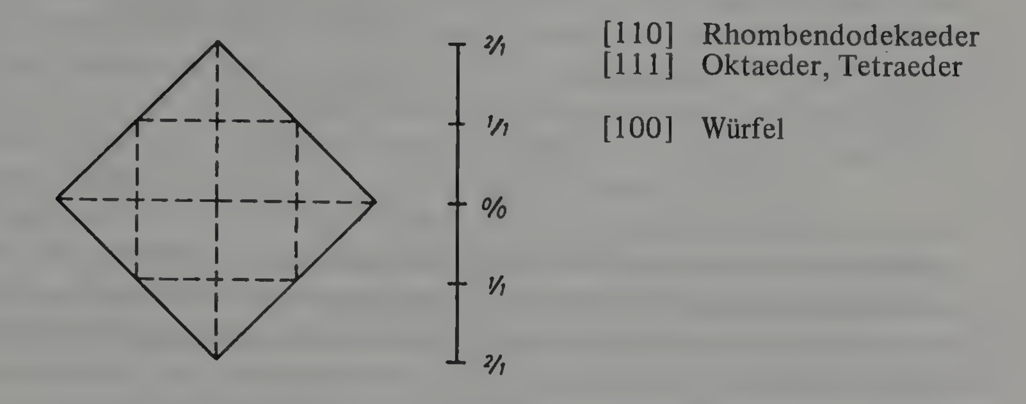
3) Der Würfel ist der einzige Grenzkörper, von dem aus in allen Zonenreihen über die Winkelfunktionen direkt pythagoreische Zahlentripel auftreten können.

Durch die Erweiterung seines Achsenkreuzes, die maximal bis zur Verdopplung möglich ist, können nun alle vier Grenzkörper: Würfel, Tetraeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder, in Beziehung zueinander gebracht werden.

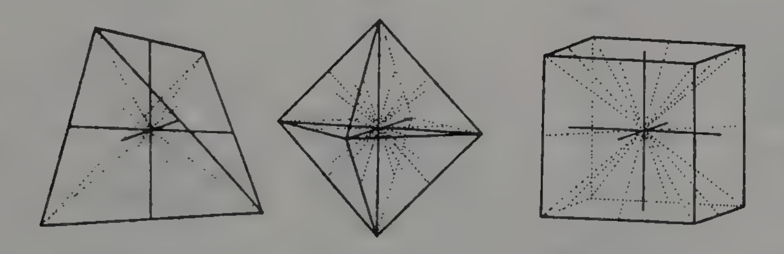


Der Oktavenraum, wie er bisher nur in der Zonenreihe von Würfel – Pyramidenwürfel – Rhombendodekaeder beschrieben wurde, läßt sich nun auf alle kristallinen Körperformen des kubischen Systems erweitern. Er stellt ein denkbar einfaches stereometrisches Gestaltungsprinzip dar, das allerdings erst durch die Bildung der kristallinen Zwischenkörper in den verschiedenen Zonenreihen richtig zur Geltung kommt. Die Gleichsetzung des Oktavenraums mit dem harmonikalen Raum hat hier ihren stereometrischen und harmonikalen Hintergrund. Das besondere Merkmal des harmonikalen Raumes ist demnach, daß er in den Körpern des kubischen Kristallsystems über den Oktavenraum nicht hinausgeht und dennoch vollkommen verschiedene morphologische Gestalten annehmen kann, die sich alle auf die drei Grundkörper Würfel, Tetraeder und Oktaeder zurückführen lassen.

Schnitt durch die Achsenebene in einem harmonikalen Vergleich

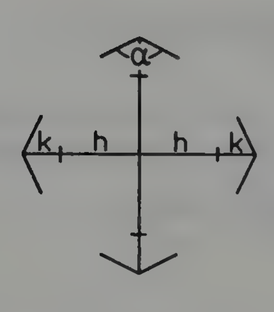


Die pythagoreischen Zahlentripel haben nun in der Erweiterung bzw. Verkleinerung der Diagonalen in den Grenzkörpern ihren stereometrischen Hintergrund.



Die Vielzahl der Diagonalen in den abgebildeten Grundkörpern Würfel, Tetraeder und Oktaeder gibt ein ungefähres Bild der Möglichkeiten, die sich aus ihrer Veränderung ergeben und die über bestimmte strukturelle Gesetzmäßigkeiten zu neuen Körpern führen. Alle Erweiterungen stehen in einem rationalen Verhältnis von relativ niedrigen Zahlen zum Grundkörper. Es läßt sich zeigen, daß sich die verschiedenen rationalen Zahlenverhältnisse, die aus der Erweiterung der entsprechenden Diagonalen entstehen, alle harmonikal auf das rechtwinklige Achsenkreuz beziehen lassen. Gerade deshalb ist es wichtig, ein gemeinsames Merkmal, wie es die pythagoreischen Zahlen darstellen, als verbindendes harmonikales Strukturelement herauszustellen.

Das stereometrische Prinzip der pythagoreischen Zahlen in den Winkelfunktionen der neun Kristallkörper (siehe die Tabelle auf Seite 83), an denen diese nachgewiesen werden können, läßt sich auf das folgende Grundschema zurückführen:



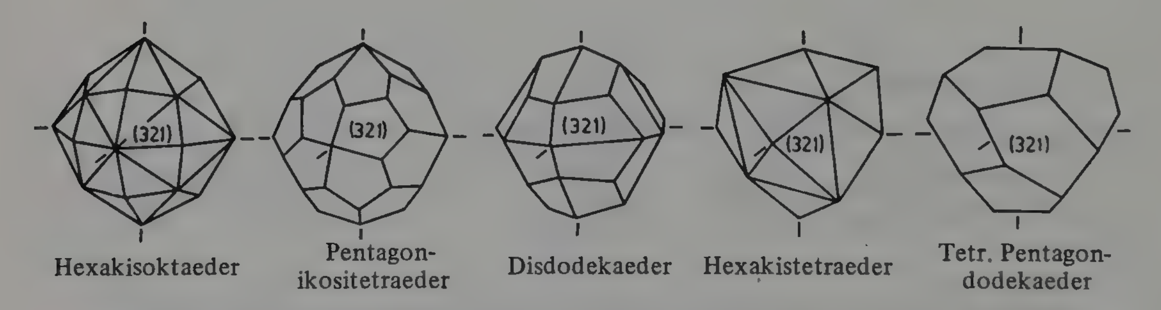
$$\cos\alpha = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}$$

pythagoreische Zahlen:

$h^2 - k^2$	a
$2hk$	b
$h^2 + k^2$	c

Dieses Grundprinzip wird in den einzelnen Kristallkörpern noch durch weitere Diagonalen ergänzt und führt so zu dem Phänomen, daß Kristallkörper einen vollkommen verschiedenen äußeren Habitus haben können und dennoch kristallographisch mit den gleichen Indizes beschrieben werden. Über die Winkelfunktionen der Begrenzungswinkel können diese Körper den entsprechenden pythagoreischen Zahlendreiecken zugeordnet werden.

Beispiel: Kristallindex [321]



Hexakisoktaeder — Pentagon-ikositetraeder — Disdodekaeder — Hexakistetraeder — Tetr. Pentagon-dodekaeder

Obwohl diese fünf Kristallkörper äußerlich grundverschieden sind, haben sie doch den gleichen Begrenzungswinkel in der Ebene des Achsenkreuzes:

[321] $\alpha = 112^0 37' 12''$
$\cos\alpha = 5/13$

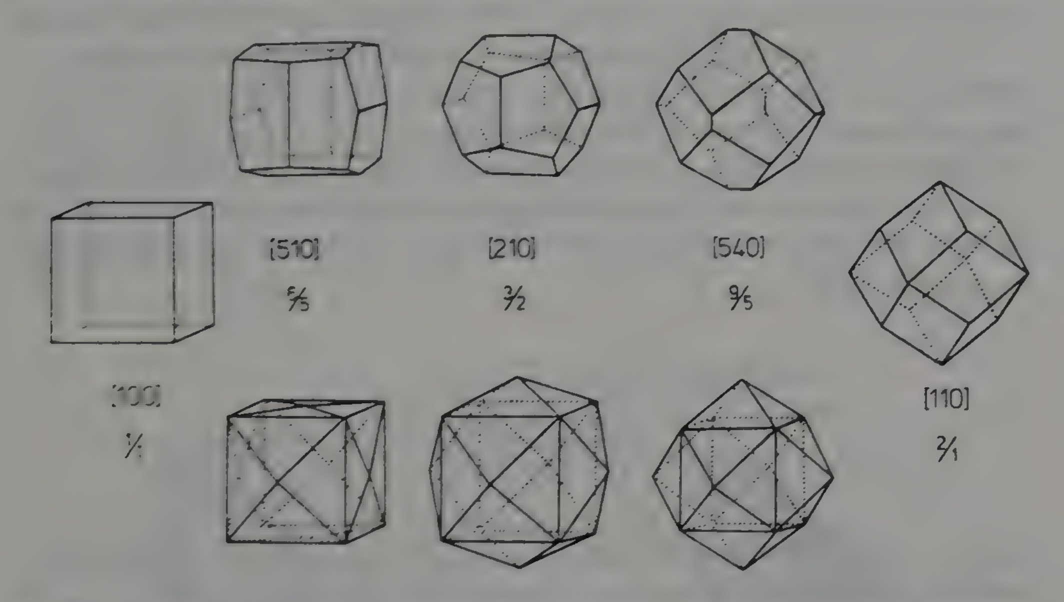
α, 5, 13, 12

Diese Ebene kann mit der jeweiligen Kante des Kristallkörpers zusammenfallen, wie dies beim Ikositetraeder, beim Hexakisoktaeder und beim Disdodekaeder der Fall ist, und ist dadurch deutlich gekennzeichnet. Sie kann aber auch innerhalb einer Fläche liegen und ist so nicht unmittelbar zu erkennen. Am Beispiel des 90^0-Winkels am Tetraeder wurde auf diese Schwierigkeit schon hingewiesen. Man hilft sich hier am besten dadurch, daß man die verschiedenen Kristallkörper als Modelle konstruiert, da dies am leichtesten zu einem stereometrischen und harmonikalen Verständnis führt.

Um diesen schwierigen Zusammenhang zu vereinfachen, werden nur die

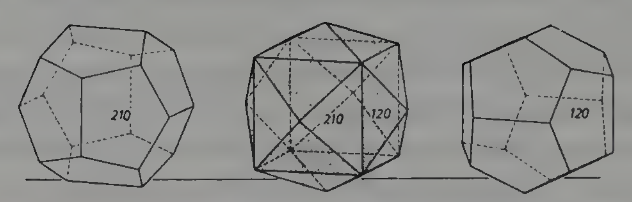
wichtigsten Körper des kubischen Kristallsystems ausführlicher behandelt, da sich über die gleichen Kristallindizes die Winkelbeziehungen der pythagoreischen Dreiecke auch auf die weiteren Körper ausdehnen lassen. Weiterführende Literatur über die Morphologie dieser Kristallkörper, in der die vielfältigen Winkelbeziehungen einzelner Körper mit den wichtigsten in der Natur vorkommenden Kristallindizes teilweise schon berechnet vorliegen, vermittelt das Literaturverzeichnis am Ende des Buches. Verwiesen sei insbesondere auf die Arbeiten von HAÜY, WEISS, ROSE, MILLER und LIEBISCH.

Zwischen den Grenzkörpern Würfel und Rhombendodekaeder gibt es außer der schon ausführlich beschriebenen Reihe der kristallinen Pyramidenwürfel noch eine zweite Zonenreihe, in der es zur Ausbildung symmetrischer Pentagondodekaeder kommt.



Die verschiedenen kristallinen Pentagondodekaeder unterscheiden sich von der regelmäßigen Form dadurch, daß ihre symmetrischen Fünfecke aus vier gleichen und einer längeren oder kürzeren Seite bestehen, wie dies aus den Beispielen der obigen Abbildung ersichtlich ist. Es gibt also, analog zu den Pyramidenwürfeln, flache, mittlere und steile Formen, die sich auf dem Würfel als Grundkörper aufbauen.

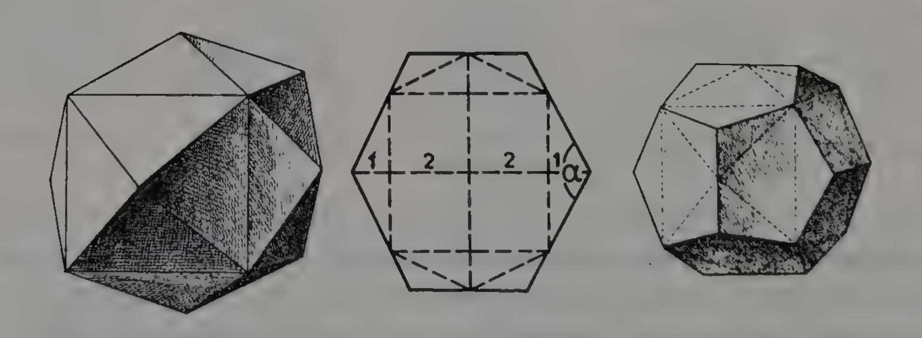
Der Pyramidenwürfel und das Pentagondodekaeder sind in der kristallographischen Bezeichnung über die Millerschen Kristallindizes identisch, da zwei Pentagondodekaeder in einer korrelaten Beziehung zu einem Pyramidenwürfel stehen (Abbildung auf Seite 90).



Das Pentagondodekaeder [210] (positiv) und [120] (negativ)
und ihre Beziehung zum Pyramidenwürfel [210][1]

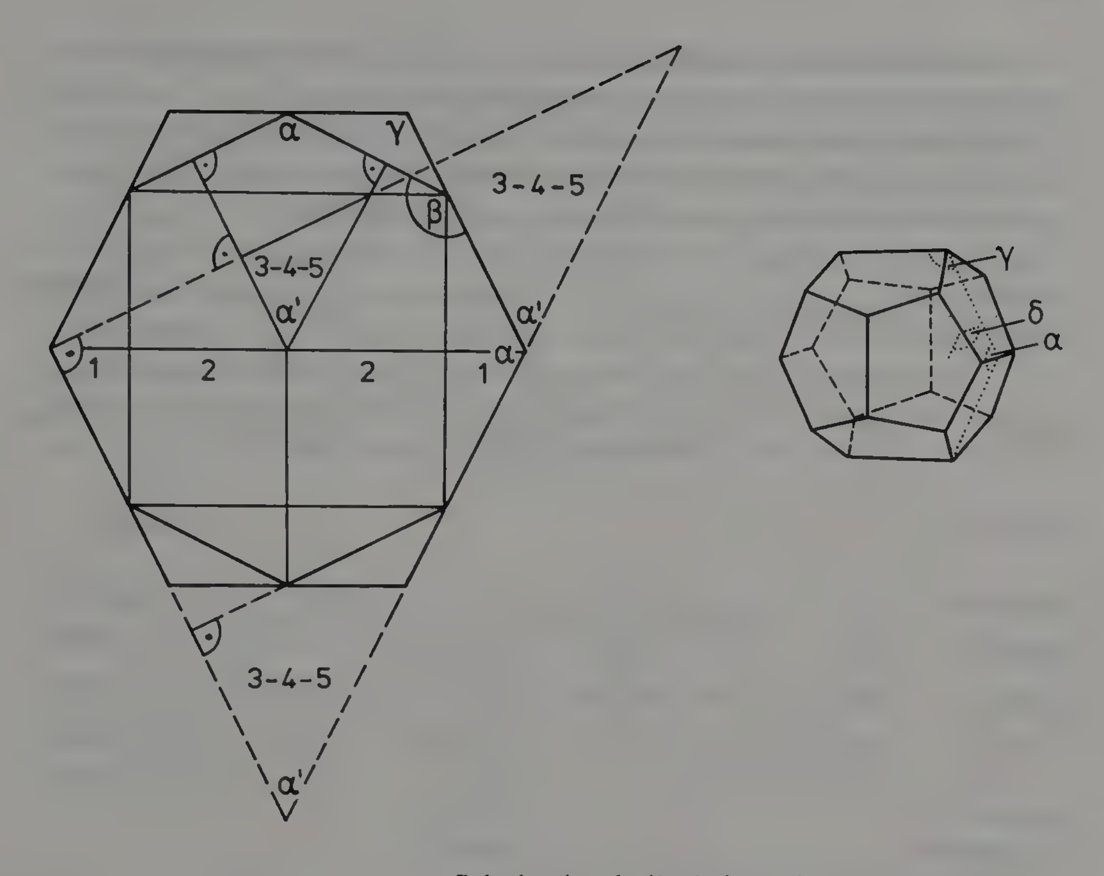
Entsprechend ist auch ihre Winkelbegrenzung am Achsenkreuz gleich. Sie wird gebildet durch den Winkel α zweier benachbarter Flächen über der längeren oder kürzeren Kante, die parallel zur Würfelkante liegt. Dieser Begrenzungswinkel kann bei jedem Pentagondodekaeder [hk0] einem pythagoreischen Dreieck zugeordnet werden. Auch gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Pentagondodekaeder, die sich in ihrem Begrenzungswinkel α komplementär ergänzen, wie dies analog bei den Pyramidenwürfeln ausführlich dargestellt wurde.

Den stereometrischen Zusammenhang zwischen Pyramidenwürfel [210] und Pentagondodekaeder [210] kann man auch über den Schnitt durch die Achsenebene herstellen[2].



Der Begrenzungswinkel α in der Ebene des Achsenkreuzes ist somit in beiden Körpern mit dem gleichen Kristallindex identisch. Der komplementäre Winkel β am Pyramidenwürfel [210] tritt jedoch am Pentagondodekaeder [210] nicht mehr auf. Statt dessen kommt der Winkel γ neu hinzu. Der letztere tritt an der Spitze einer symmetrischen Fünfeckfläche und der anschließenden Kante, die der Würfelkante parallel liegt, auf.

1) Abbildung nach Ramdohr/Strunz, 39.
2) Abbildung nach M. Brückner.



Schnitt durch die Achsenebene
am [210] Pentagondodekaeder
mit den Winkeln a, γ, δ

Am Beispiel des wichtigsten Pentagondodekaeders [210] sind es die beiden folgenden Winkel, die in seiner äußeren Begrenzung der Achsenebene auftreten:

1)	$a_{[210]}$	=	126° 52' 12"	$\cos a$	=	$-3/5$	3–4–5
2)	$\gamma_{[210]}$	=	116° 33' 54"	$\cos\gamma$	=	$-1/\sqrt{5}$	$1-2-\sqrt{5}$
				$\operatorname{tg}\gamma$	=	-2	

Außerdem gibt es noch einen dritten äußeren Winkel am Pentagondodekaeder [210], der sich jeweils über den vier gleich langen Kanten des symmetrischen Fünfecks ergibt.

$\delta_{[210]}$	=	113° 34' 41"	$\cos\delta$	=	$-2/5$	$2-\sqrt{21}-5$

Da dieser Winkel jedoch nicht in der Ebene des rechtwinkligen Achsenkreuzes liegt, kann er hier unberücksichtigt bleiben.

Von den drei verschiedenen Körperwinkeln eines kristallinen Pentagondodekaeders ist nur der Begrenzungswinkel a wegen seiner harmonikalen Einord-

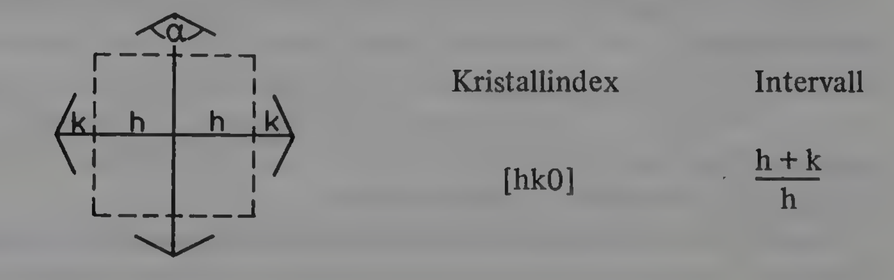
nung am Achsenkreuz von Bedeutung und führt über die entsprechenden Winkelfunktionen direkt zu den pythagoreischen Zahlen.

Der Winkel γ hat dagegen eine andere interessante Funktion, indem er grundsätzlich einem rechtwinkligen Dreieck zugeordnet werden kann, das in den Katheten die Zahlen h und k der Kristallindizes enthält.

Pentagon-dodekaeder	Zahlenpaar	Winkel α	pythag. Dreieck	Winkel γ	rechtwinkliges Dreieck
[hk0]	h/k	$\cos_\alpha = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}$	a–b–c	$\mathrm{tg}\,\gamma = h/k$	h–k–$\sqrt{h^2 + k^2}$
Beispiele:					
[210]	2/1	$\cos_\alpha = 3/5$	3–4–5	$\mathrm{tg}\,\gamma = 2/1$	2–1–$\sqrt{5}$
[310]	3/1	$\cos_\alpha = 4/5$	8–6–10	$\mathrm{tg}\,\gamma = 3/1$	3–1–$\sqrt{10}$
[320]	3/2	$\cos_\alpha = 5/13$	5–12–13	$\mathrm{tg}\,\gamma = 3/2$	3–2–$\sqrt{13}$
[530]	5/3	$\cos_\alpha = 8/17$	16–30–34	$\mathrm{tg}\,\gamma = 5/3$	5–3–$\sqrt{34}$
regelm. P.-dodekaeder			rechtw. Dreieck		
[$(\sqrt{5}+1)$20]	$(\sqrt{5}+1)/2$ = 1,618.../1	$\cos_\alpha = 1/\sqrt{5}$ $\mathrm{tg}_\alpha = 2/1$	1–2–$\sqrt{5}$	$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	

Zum Vergleich sind auch die Zahlen des regelmäßigen Pentagondodekaeders mit aufgeführt, um den zahlentheoretischen Unterschied zu demonstrieren. Sie müssen jedoch im folgenden noch näher erläutert werden.

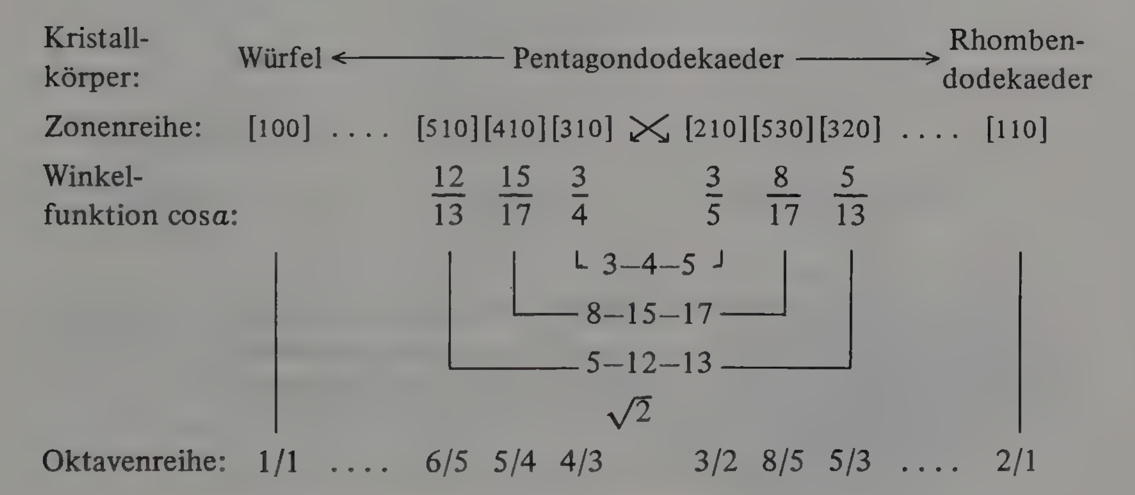
Auf das rechtwinklige Koordinatensystem bezogen läßt sich das Verhältnis der Achsenabschnitte von Pentagondodekaeder und eingeschriebenem Würfel ebenfalls in die entsprechende harmonikale Beziehung eines Intervalls bringen, die sich direkt aus dem Zahlenwert des Kristallindexes ableiten läßt.



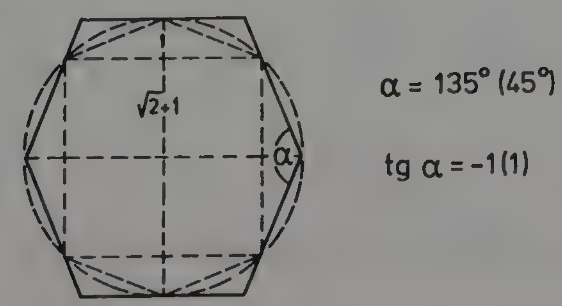
Die verschiedenen kristallinen Pentagondodekaeder bilden zwischen dem Würfel und dem Rhombendodekaeder eine Zonen- und Oktavenreihe mit dem gleichen stereometrischen und harmonikalen Hintergrund wie die Pyramidenwürfel. Die beiden strukturell einfachsten kristallinen Pentagondodekaeder [210] und [310] lassen sich ebenfalls dem ersten pythagoreischen Dreieck 3–4–5 und harmonikal den beiden wichtigsten Intervallen im Oktavenraum, Quinte und Quarte, zuordnen.

Die komplementäre Beziehung zweier bestimmter Pentagondodekaeder, die sich stereometrisch in ihrem Begrenzungswinkel α über ein pythagoreisches Dreieck und harmonikal in den entsprechenden Intervallen zur Oktave ergänzen, ist auch in dieser Zonenreihe ein allgemeingültiges Prinzip:

Beispiel:

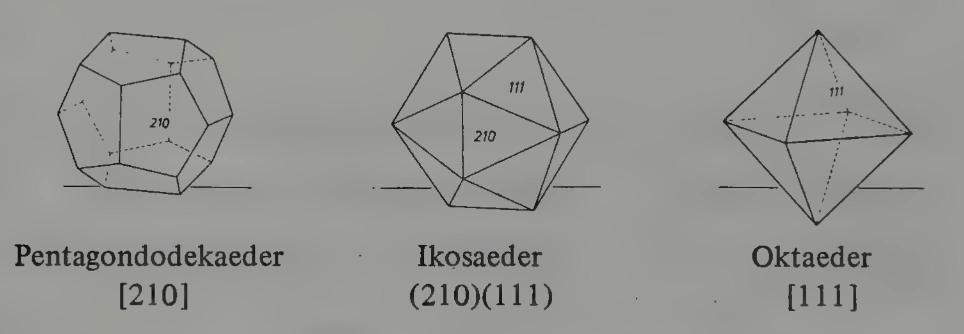


Der Kreuzungspunkt ⤫ dieser Zonenreihe wird durch ein Pentagondodekaeder gekennzeichnet, dessen Begrenzungswinkel am Achsenkreuz 135^0 (45^0) beträgt. Der Schnitt durch die Achsenebene eines solchen Pentagondodekaeders bildet kein regelmäßiges Achteck, wie dies beim entsprechenden Pyramidenwürfel der Fall war, sondern ein symmetrisches Sechseck. Das rechtwinklige Achsenkreuz wird in beiden Fällen durch den eingeschriebenen Würfel irrational geteilt.



Damit wird klar, daß auch dieses Pentagondodekaeder kristallin nicht auftreten kann. Harmonikal stellt es das geometrische Mittel $\sqrt{2}$ der Oktavenreihe dar und bildet so den Kreuzungspunkt zweier komplementärer Intervalle, die dem gleichen pythagoreischen Dreieck zugeordnet sind.

Das Pentagondodekaeder [210] bildet mit dem Oktaeder [111] einen Kombinationskörper, den man als die kristalline Variante des Ikosaeders bezeichnet. Hier liegt eine gegenseitige Durchdringung zweier einzelner Kristallkörper [210] und [111] vor, die zur Kombinationsform (210)(111) führt. Das kristalline Ikosaeder besteht im Gegensatz zur regelmäßigen Form nicht aus 20 gleichseitigen Dreiecken, sondern ist aus 12 gleichschenkligen Dreiecken (210) und aus 8 gleichseitigen Dreiecken (111) aufgebaut[1].



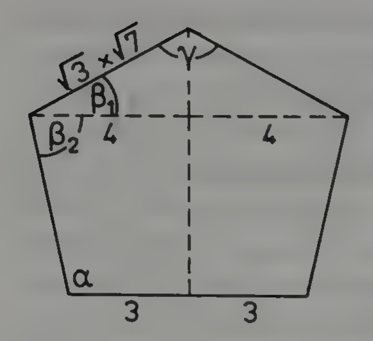
Pentagondodekaeder [210] — Ikosaeder (210)(111) — Oktaeder [111]

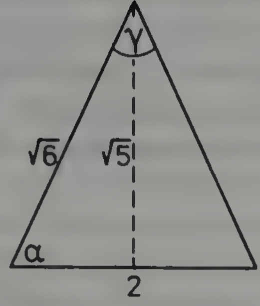
Die Winkel, die sich bei den kristallinen Formen von Pentagondodekaeder [210] und Ikosaeder (210)(111) an der Begrenzung des Achsenkreuzes ergeben, haben den gleichen Zahlenwert und im pythagoreischen Dreieck 3–4–5 ihre stereometrische Entsprechung.

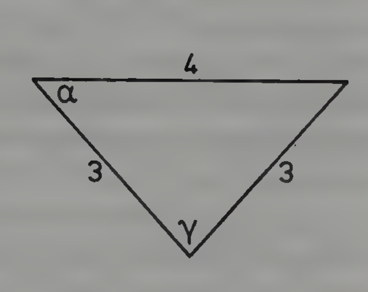
$$a = 126^\circ 52' 12'' \quad (\cos_a = -3/5) \quad 3\text{–}4\text{–}5$$

Die verschiedenen Formen von (210)-Flächen, wie sie am Pyramidenwürfel [210], am Pentagondodekaeder [210] und am kristallinen Ikosaeder (210)(111) vorliegen, stehen in direkter geometrischer Beziehung zueinander.

1) Abbildung nach Ramdohr/Strunz, 35.39.439.







(210)-Fläche am Pentagondodekaeder

$a = 102^0 36'16''$

$\mathrm{tg}\,a = -2\sqrt{5}$

$\gamma = 121^0 35'17''$

$\cos\gamma = -11/21$

(210)-Fläche am „Ikosaeder“

$a = 65^0 54'19''$

$\cos a = 1/\sqrt{6}$

$\gamma = 48^0 11'23''$

$\cos\gamma = 2/3$

(210)-Fläche am Pyramidenwürfel

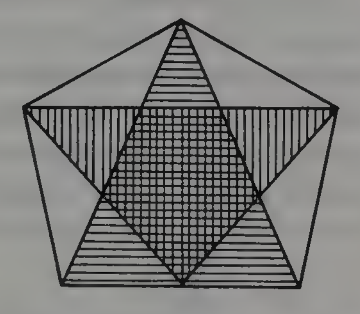
$a = 48^0 11'23''$

$\cos a = 2/3$

$\gamma = 83^0 37'14''$

$\cos\gamma = 1/9$

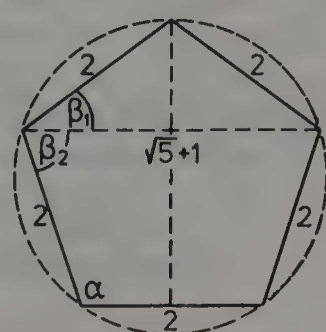
Die verschiedenen (210)-Flächen in ihrem geometrischen Zusammenhang



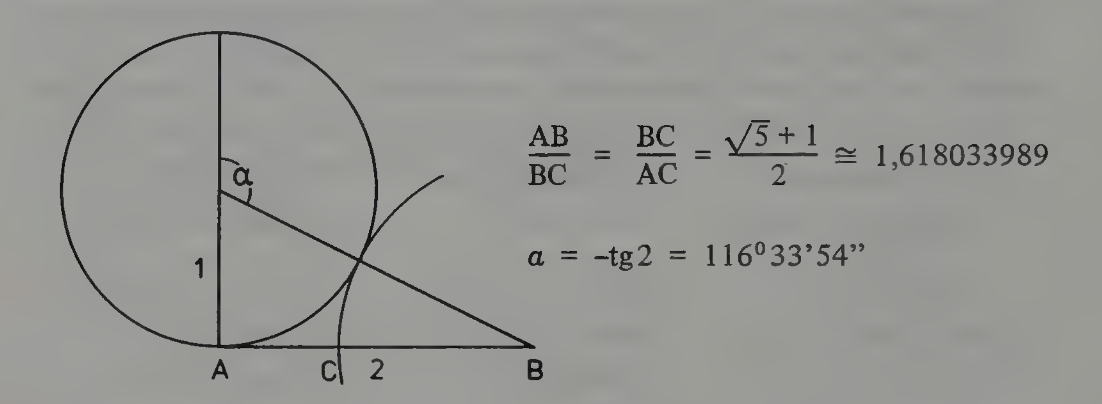
Vergleicht man das symmetrische Fünfeck des kristallinen Pentagondodekaeders, hier am Beispiel der Fünfeckfläche (210), mit dem gleichseitigen Fünfeck des regelmäßigen Pentagondodekaeders, erkennt man, daß in den Kanten und Winkelfunktionen zwei völlig verschiedene Arten von irrationalen Zahlen auftreten.

gleichseitiges Fünfeck:

a	=	108^0	$\cos a$	=	$-1/(\sqrt{5}+1)$
β_1	=	72^0	$\cos\beta_1$	=	$1/(\sqrt{5}+1)$
β_2	=	36^0	$\cos\beta_2$	=	$1/(\sqrt{5}-1)$



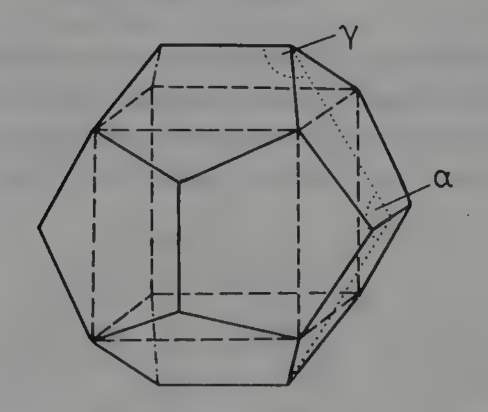
Die Irrationalität am gleichseitigen Fünfeck ist ein zusammengesetztes Zahlenverhältnis $(\sqrt{5} + 1) : 2$ und führt zur stetigen Teilung bzw. zum *Goldenen Schnitt.* Der Goldene Schnitt bedeutet: Eine Strecke heißt stetig oder nach dem Goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die ganze Strecke AB zum größeren Abschnitt BC so verhält wie dieser zum kleineren Abschnitt AC.



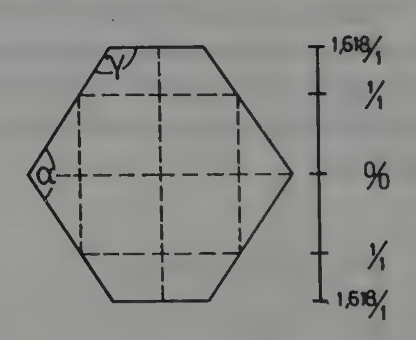
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}618033989$$

$$a = -\text{tg}\,2 = 116^{\circ}33'54''$$

Der Goldene Schnitt hat seinen Ursprung im rechtwinkligen Dreieck 1–2–$\sqrt{5}$. Der Außenwinkel a dieses Dreiecks ist identisch mit dem Begrenzungswinkel des regelmäßigen Pentagondodekaeders am Achsenkreuz. Darüber hinaus tritt er an diesem Körper auch an den anderen Kanten zweier benachbarter Flächen auf, die jedoch nicht in der Achsenebene liegen. Wird nun das rechtwinklige Achsenkreuz des regelmäßigen Pentagondodekaeders nach dem Goldenen Schnitt geteilt, bildet der Würfel den größeren Abschnitt auf dem Achsenkreuz und die irrationale Erweiterung den kleineren Abschnitt.



regelmäßiges
Pentagondodekaeder



Schnitt durch die
Achsenebene

Das Auftreten des irrationalen Zahlenverhältnisses des Goldenen Schnitts

$$\frac{1 + 0{,}6180339\ldots}{1} = 1{,}6180339\ldots$$

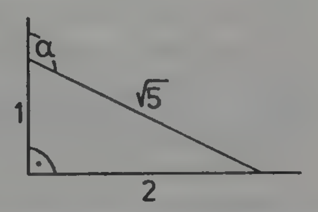
am Achsenkreuz des regelmäßigen Pentagondodekaeders ist die Ursache, daß dieses als Kristall nicht auftreten kann. Entsprechend ist auch der Begrenzungswinkel a keinem rationalen rechtwinkligen Dreieck zuzuordnen. Demgegenüber haben alle symmetrischen Varianten der kristallinen Pentagondodekaeder ein rationales Teilungsverhältnis am Achsenkreuz und der Begrenzungswinkel a geht in seiner Winkelfunktion auf ein pythagoreisches Dreieck zurück.

In der äußeren Begrenzung des regelmäßigen Pentagondodekaeders treten nur zwei Winkelgrößen auf:

1) Der Winkel a, der dem rechtwinkligen Dreieck $1-2-\sqrt{5}$ zugeordnet wird und jeweils über zwei benachbarten Flächen zu finden ist.

$$a = 116^0 33'54''$$

$$\cos a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{oder} \quad \text{tg}\, a = -2$$

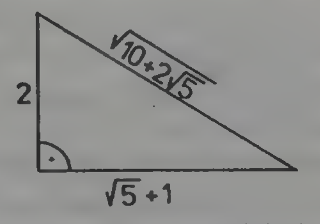


Er ist außerdem mit dem Begrenzungswinkel a des Achsenkreuzes zahlengleich.

2) Der Winkel γ, der sich an der Spitze einer regelmäßigen Fünfeckfläche und der anschließenden Kante zweier weiterer Fünfecke bildet. Im Schnitt der Achsenebene ist er jeweils dem Begrenzungswinkel benachbart. Der Winkel γ entspricht dem rechtwinkligen Dreieck $1-1{,}618\ldots-\sqrt{3{,}618\ldots}$.

$$\text{tg}\gamma = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1{,}618\ldots$$

$$\gamma = 121^0 43'3''$$



In diesem rechtwinkligen Dreieck bilden die Zahlen des Goldenen Schnitts eine stereometrische Winkelfunktion am Körper, während sie sich in den Winkeln 36^0, 72^0 und 108^0 nur in der zweidimensionalen Form der regelmäßigen Fünfeckfläche ergeben.

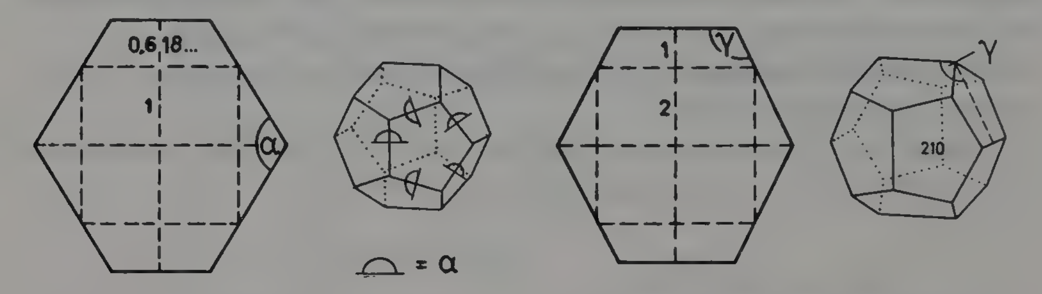
Die Irrationalität der Achsenabschnitte am regelmäßigen Pentagondodekaeder führt zwangsläufig auch zu irrationalen Indizes, wenn man eine den Kristallindizes entsprechende Form der Darstellung wählt (siehe Seite 92).

$$[(\sqrt{5}+1)20] = [1{,}618\ldots 10]$$

$$\text{oder} \quad [1\frac{\sqrt{5}-1}{2}0] = [1\,0{,}618\ldots 0]$$

Nachdem der strukturelle Unterschied des kristallinen und des regelmäßigen Pentagondodekaeders in ihrer rationalen bzw. irrationalen Beziehung zum rechtwinkligen Achsenkreuz behandelt wurde, stellt sich die Frage nach einem übergeordneten mathematischen Zusammenhang zwischen diesen Körpern.

Es gibt am regelmäßigen Pentagondodekaeder und am ersten und wichtigsten kristallinen Pentagondodekaeder [210] eine wesentliche strukturelle Gemeinsamkeit. Es ist das Auftreten des gleichen Winkels von 116°33' 54" (tg = -2) an verschiedenen Stellen der beiden ähnlichen Körper.



Schnitt durch die Achsenebene regelmäßiges Pentagondodekaeder

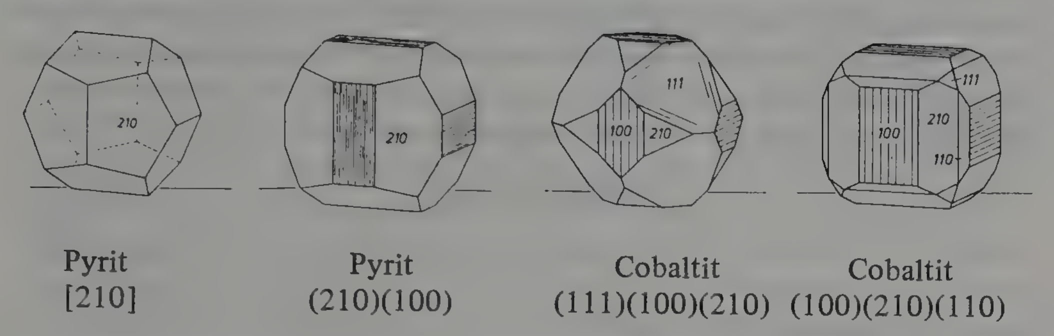
Schnitt durch die Achsenebene kristallines Pentagondodekaeder [210]

Dieser Winkel ist in beiden Fällen dem rechtwinkligen Dreieck $1-2-\sqrt{5}$ zugeordnet:

α regelmäßiges Pentagondodekaeder $=$ γ kristallines Pentagondodekaeder [210] $=$ 116°33'54"

Er ist einerseits der entscheidende Winkel am regelmäßigen Pentagondodekaeder, da er hier 30mal über allen Kanten zweier benachbarter Fünfecke auftritt, und bildet über das rechtwinklige Dreieck die Grundlage des Goldenen Schnitts zur geometrischen Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und Zehnecks. Andererseits tritt die gleiche Winkelgröße am [210]-Pentagondodekaeder auf, aber auch in den Kombinationen des Pentagondodekaeders [210] mit dem Würfel [100] und überall dort, wo (210)- und (100)-Flächen sich gegenseitig abgrenzen.

Beispiele für Pyrit und Cobaltit[1]:



Pyrit [210] — Pyrit (210)(100) — Cobaltit (111)(100)(210) — Cobaltit (100)(210)(110)

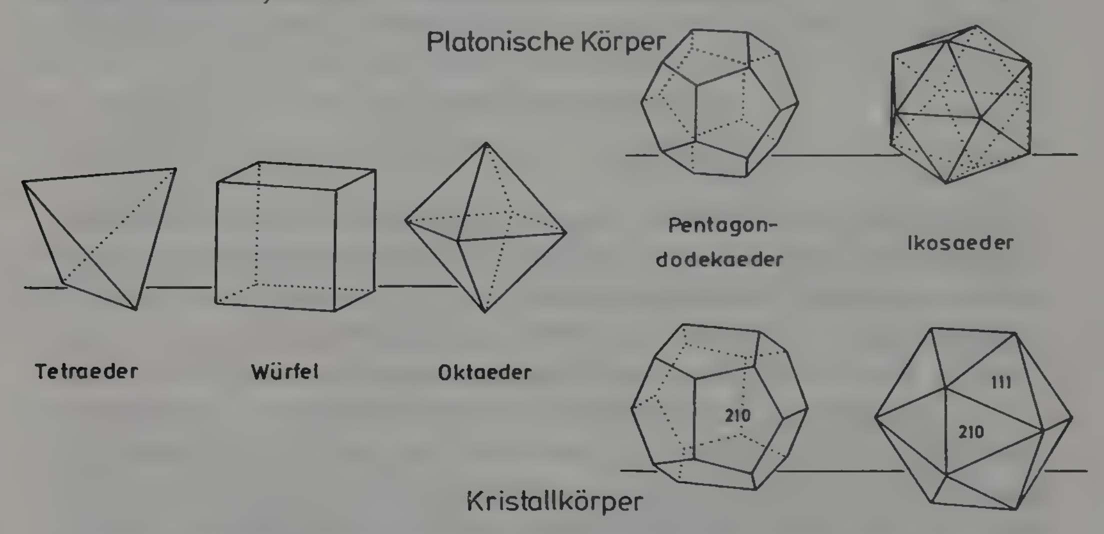
Dieser Winkel von $116^{0}33'54''$, der am regelmäßigen Pentagondodekaeder die Ursache dafür ist, daß dieser Körper als Kristall nicht auftreten kann, kann dennoch am kristallinen Pentagondodekaeder [210] vorkommen, da er hier nicht die Begrenzung des Achsenkreuzes bildet. Am regelmäßigen Pentagondodekaeder führt dieser Winkel, wie dies ausführlich dargestellt wurde, zu irrationalen Verhältnissen am Achsenkreuz. Der gleiche Winkel γ am kristallinen Pentagondodekaeder [210] und an dessen Kombinationen mit dem Würfel [100] ist jedoch sekundärer Art, da der eigentliche Begrenzungswinkel α einem pythagoreischen Dreieck zugeordnet werden kann und somit auch zu rationalen Verhältnissen am Achsenkreuz führt. Entscheidend für die harmonikale Bewertung eines Winkels (und des entsprechenden rechtwinkligen Dreiecks) ist seine Einordnung am rechtwinkligen Achsenkreuz des zugrundeliegenden Kristallkörpers.

Es kann hier nicht auf alle Zusammenhänge in den regelmäßigen und kristallinen Formen des Pentagondodekaeders und des Ikosaeders eingegangen werden. So kam es hier vor allem darauf an, das Wesentliche an diesen Körpern herauszustellen. Es mußten deshalb auch das regelmäßige Pentagondodekaeder und der Goldene Schnitt in die Thematik der pythagoreischen Zahlen im kubischen Kristallsystem miteinbezogen werden. Gerade wegen der großen Ähnlichkeit im Aussehen der regelmäßigen und der kristallinen [210] Formen des Pentagondodekaeders, aber auch des Ikosaeders, schien dies erforderlich.

Es war René-Juste HAÜY, der 1785 auf den strukturellen Unterschied der regelmäßigen und kristallinen Formen von Pentagondodekaeder und Ikosaeder am Beispiel des in der Natur häufig vorkommenden Pyrits oder Schwefelkieses hinwies. Er berechnete die verschiedenen Körper- und Flächenwinkel sowohl für das kristalline Pentagondodekaeder als auch für das kristalline Ikosaeder. Auf seine Veröffentlichungen und Bücher wird deshalb besonders hingewiesen, da es heute kaum ein Buch gibt, das so detailliert auf den morphologischen Unterschied der mathematisch-regelmäßigen und der kristallinen Formen des Pentagondodekaeders und Ikosaeders eingeht. Es bedeutete damals einen we-

1) Abbildungen nach Ramdohr/Strunz, 39. 455. 460.

sentlichen Fortschritt im Verständnis dieser Körper, daß Haüy erkannte, daß die in der Natur vorkommenden *Platonischen Körper* nur in den Grundkörpern Würfel, Tetraeder und Oktaeder dieser platonischen Idee entsprachen, während das regelmäßige Pentagondodekaeder und Ikosaeder in der Kristallwelt nicht auftreten können, sondern nur ihre rationalen Varianten.



Die wichtigsten Winkel sowie die ihnen entsprechenden rechtwinkligen bzw. pythagoreischen Dreiecke an den verschiedenen Formen der *Platonischen Körper* werden zur besseren Übersicht noch einmal zusammengefaßt. Die Bedeutung der einfachen rationalen Zahlen in den Winkelfunktionen der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke kommt so am besten zur Geltung.

	Winkel zwischen 2 Flächen	Winkelfunktion	rechtwinkliges Dreieck	Begrenzungswinkel a des Achsenkreuzes
Würfel	90°	sin = 1	–	180°
Tetraeder	70°31'44"	cos = 1/3	$1-2\sqrt{2}-3$	90°
Oktaeder	109°28'16"	cos = –1/3	$1-2\sqrt{2}-3$	90°
regelmäßiges Ikosaeder	138°11'23"	sin = –2/3	$2-\sqrt{5}-3$	138°11'23"
regelmäßiges Pentogondodekaeder	116°33'54"	tg = –2	$1-2-\sqrt{5}$	116°33'54"
	(210)–(210)		pythagoreisches Dreieck	
kristallines Ikosaeder (210)(111)	126°52'12"	cos = –3/5	3–4–5	126°52'12"
krist. Pentagondodekaeder [210]	126°52'12"	cos = –3/5	3–4–5	126°52'12"

Von den verschiedenen kristallinen Formen der Platonischen Körper treten beim Pyrit der Würfel, das Oktaeder, das Ikosaeder und das Pentagondodekaeder als Einzelkristalle von teilweise beträchtlicher Größe auf. Schöne Pyrite findet man besonders im Mittelmeerraum. Es sind hier vor allem die Fundorte Brasso, Traversella (beide im Piemont), die Toskana sowie die Insel Elba in Italien, Kassandra auf Chalkidike in Griechenland sowie Fundstellen in Nordspanien und in der Türkei zu nennen. Beim Fluorit findet man häufig den Würfel und das Oktaeder, seltener den Pyramidenwürfel. Das Tetraeder trifft man am ehesten bei der Zinkblende und beim Tetraedrit an, einem Mineral, das unter die Gruppe der Fahlerze fällt. Als Beispiel für das Rhombendodekaeder und das Ikositetraeder wäre insbesondere der Granat zu erwähnen, der in dieser Kristallform ausgesprochen häufig ist und als Halbedelstein sehr geschätzt wird.

Die Zahl der Mineralien, in denen die kristallinen Grundkörper auftreten, ist natürlich wesentlich größer und keineswegs auf Pyrit, Fluorit, Zinkblende oder Tetraedrit beschränkt. Es kommt hier nur darauf an, einige typische Vertreter aus der Vielzahl der Möglichkeiten hervorzuheben, um eine bestimmte Körperform bei einem der bekannteren Mineralien zu finden. Außerdem lassen sich die einzelnen kristallinen Platonischen Körper: Würfel, Oktaeder, Tetraeder, Pentagondodekaeder und Ikosaeder auch durch Kristallzüchtung von bestimmten chemischen Verbindungen wie (K-, Cs-; Cr-, Al-)Alaunen, Natriumchlorat, Natriumchlorid u. a. herstellen, wobei allerdings auf die spezielle Fachliteratur hingewiesen werden muß.

Bei den Kristallen gilt in den Indizes allgemein das Prinzip der Rationalität der Zahlen. Dies ist bekanntlich die eigentliche Ursache, daß das regelmäßige Ikosaeder und Pentagondodekaeder kristallin nicht auftreten können. Ist nun dieses Prinzip der Rationalität der Zahlen in der Natur auf den anorganischen Bereich der Kristalle beschränkt? Es gibt in der Natur verschiedene Bauformen von Radiolarien und Viren[1], die in ihrem Aussehen den regelmäßigen Formen der Platonischen Körper ähnlich sind. Besonders das Ikosaeder ist in den Viren sehr häufig anzutreffen. Zahlreiche Virenarten lassen sich auf diesen ikosaedrischen Grundkörper zurückführen[2]. Eine exakte Bestimmung ihrer mathematischen Größen ist jedoch schon wegen der Kleinheit dieser Körper nicht möglich. Allgemein geht man davon aus, daß in diesen nicht-kristallinen Körpern, den Viren und Radiolarien u. ä., das Ikosaeder und Pentagondodekaeder als regelmäßige Form mit einer fünfzähligen Achse[3] auftreten. An der Irrationalität von Ikosaeder und Pentagondodekaeder ändert sich damit nichts. Hier stellt sich eindeutig die Frage, ob die Natur das rationale und harmonikale Prinzip nur in den kristallinen Körpern zur Geltung kommen läßt, in den bio-

1) Abbildung im Anhang auf Seite 234.
2) Römpps, Chemie-Lexikon, Stuttgart 1977[7], 3820.
3) S. Haussühl, Kristallgeometrie, Weinheim 1977, 73. 83.

logischen Strukturkörpern wie Viren und Radiolarien dagegen das irrationale Prinzip der regelmäßigen Formen. Es würde vom harmonikalen Standpunkt einen absoluten Widerspruch darstellen, die Natur in einen rationalen (anorganisch-kristallinen) und einen irrationalen (organisch-biologischen) Bereich aufzuteilen. Gilt das harmonikale Gestaltungsprinzip allgemein in den Körpern, muß es auch Bestandteil der g a n z e n Natur sein und läßt sich nicht auf den engen Bereich der Kristalle beschränken. Die Beantwortung einer solchen Frage geht in ihrer grundsätzlichen Bedeutung über das hier gestellte Thema hinaus und läßt sich allenfalls über die pythagoreischen Zahlen als mathematisches Bindeglied aller schwingenden Vorgänge einer harmonikalen Lösung näherbringen.

Es wurden bisher die relativ einfach strukturierten Kristallkörper Pyramidenwürfel und Pentagondodekaeder sehr ausführlich behandelt, da sich an ihnen das harmonikale und komplementäre Strukturprinzip im Zusammenhang mit den pythagoreischen Zahlentripeln und den Zahlenpaaren auf einfache Weise darstellen ließ. Die harmonikale Interpretation dieser Körper wurde vor allem dadurch erleichtert, daß in den Zahlen der Kristallindizes nur zwei Variablen, h und k, auftraten und die dritte (null) unverändert blieb.

[hk0] z. B. [210], [310], [320], [430] usw.

In den bisher nicht beschriebenen Körpern des kubischen Kristallsystems tritt zusätzlich eine neue Zahlenkomponente l in den Kristallindizes auf, die damit zu einer weiteren Differenzierung der Kristallkörper des kubischen Systems führt (siehe die Anmerkung auf Seite 120).

[hkl] z. B. [211], [311], [332], [543] usw.

Die neu hinzugekommenen Kristallkörper lassen sich in drei Gruppen einordnen:

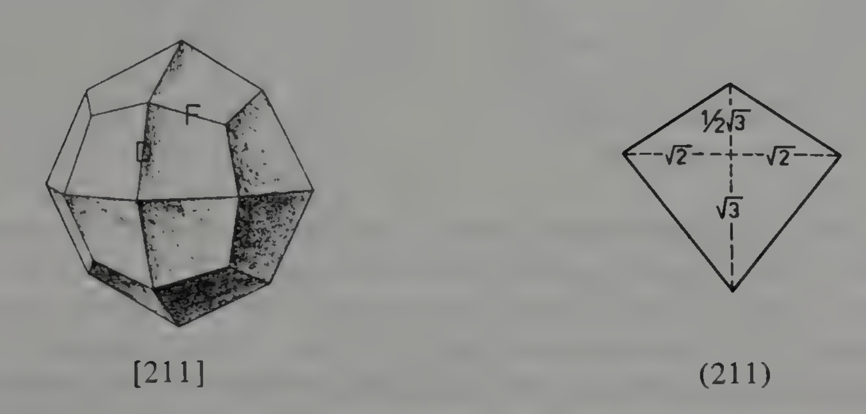
	$h > k = l$	Ikositetraeder, Pyramidentetraeder
[hkl]	$h = k > l$	Pyramidenoktaeder, Deltoiddodekaeder
	$h > k > l$	Hexakisoktaeder, Disdodekaeder, tetraedrisches Pentagondodekaeder, Hexakistetraeder, Pentagonikositetraeder

Von diesen neun Körpern werden hier nur das Ikositetraeder, das Pyramidenoktaeder, das Hexakisoktaeder und das Disdodekaeder ausführlicher behandelt. Diese vier Körper zeichnen sich gegenüber den anderen fünf dadurch aus, daß der Schnitt durch die Achsenebene eine Kante bildet, was gerade für das anschauliche Verständnis eine große Erleichterung darstellt.

Ikositetraeder [hkl] h > k = 1

(= 20 + 4 Flächner) z. B. [211], [311], [322] usw.

Die Ikositetraeder haben 24 Flächen, 48 Kanten und 26 Ecken[1]. Die Flächen bilden ein Deltoid oder Trapezoid.



[211] (211)

Am einfachsten und häufigsten ist das Ikositetraeder [211], an dem das pythagoreische Dreieck 3–4–5 direkt nachgewiesen werden kann. Dieser Körper kommt in der vollflächigen Form relativ häufig als Granat vor. Die höheren Kristallindizes treten nur in Kombination mit anderen Kristallkörpern auf. Sie finden sich bei zahlreichen Mineralien wie Bleiglanz, Spinell, Flußspat, Magnetit u. a.

Die Winkelangaben[2] für die Ikositetraeder [211] und [311] betragen:

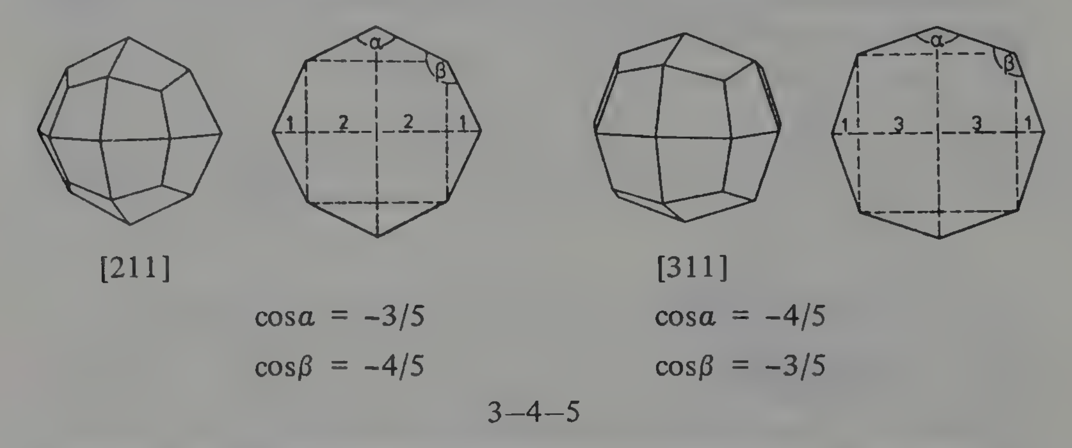
	Neigung der Flächen			
	in den Kanten D:		in den Kanten F:	
[211]	131°49'	cos = −2/3	146°27'	cos = −5/6
[311]	144°54'	cos = −9/11	129°31'	cos = −7/11

	Neigung zweier in einer Oktaederecke gegenüberliegenden				
	Flächen		Kanten		
[211]	109°28'	cos = −1/3	126°52'	cos = −3/5	3–4–5
[311]	129°31'	cos = −7/11	143°8'	cos = −4/5	

Von den verschiedenen hier angegebenenWinkeln sind die letzteren am interessantesten, da sie die Begrenzung des Achsenkreuzes bilden. Auf die be-

1) Abbildung nach Brückner.
2) Das Kristallmodellnetz für diesen Körper ist ebenfalls im Anhang beigefügt.
3) G. Rose, Elemente der Kristallographie, Berlin 1938[2], 23.

merkenswerte Eigenschaft, daß die beiden Winkel 126° 52' und 143° 8' der Ikositetraeder [211] und [311] sich komplementär zu 270°, der Summe je zweier anschließender Winkel in jedem symmetrischen Achteck, ergänzen, wurde von SADEBECK[1] hingewiesen.



Das komplementäre Prinzip läßt sich auf alle Ikositetraeder mit höheren Kristallindizes ausdehnen und führt zu den entsprechenden höheren pythagoreischen Zahlen:

[322]	[511]	5–12–13
[411]	[533]	8–15–17
[433]	[711]	7–24–25

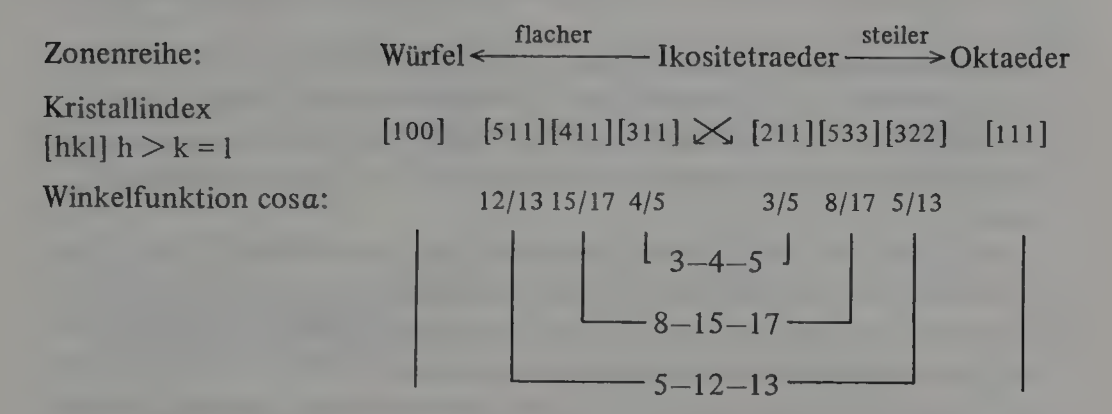
Der Schnitt durch die Achsenebene ist identisch mit dem der Pyramidenwürfel, was sich auch aus den Zahlen der Indizes erkennen läßt.

	Pyramidenwürfel	Ikositetraeder	
z. B.	[210]	[211]	
	[310]	[311]	
	[410]	[411]	usw.

Die dritte Zahlenkomponente führt zu den Ikositetraedern, indem die Diagonalen des zugrundeliegenden Würfels, die durch die Mitte der Würfelkanten führen, r a t i o n a l verändert werden.

Die verschiedenen kristallinen Modifikationen des Ikositetraeders lassen sich ebenfalls in eine Zonenreihe einordnen, die ihre äußeren Grenzkörper im Würfel und im Oktaeder hat und sich über die pythagoreischen Zahlentripel komplementär zusammenfassen läßt.

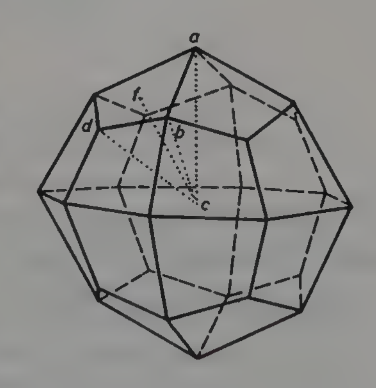
1) A. Sadebeck, Gustav Roses Elemente der Krystallographie, Berlin 1873[3], 22.



Innerhalb dieser Zonenreihe gibt es flache, mittlere und steile Formen von Ikositetraedern. Auch hier kann das regelmäßige Achteck im Schnitt durch die Achsenebene wegen seiner Irrationalität nicht auftreten und bildet gleichzeitig den Kreuzungspunkt zweier sich gegenseitig durchkreuzender Reihen. Die Ähnlichkeit mit der Zonenreihe der Pyramidenwürfel kommt so deutlich zum Ausdruck.

Man kann das Ikositetraeder in seiner einfachsten und häufigsten Form [211] geometrisch auch in der Weise beschreiben, wie dies bei C. S. WEISS geschieht, der die Längenverhältnisse dieses Körpers in eine Beziehung zu den musikalischen Tönen brachte. So berechnete er für die Hauptkörper des kubischen Kristallsystems – und im vorliegenden Fall auch für das Ikositetraeder (= Leucitoeder) – die jeweiligen Längen aus dem Mittelpunkt nach den Ecken, den Kanten und den Flächenmitten (dieser Körper) und verglich die sich ergebenen Längenverhältnisse mit den Schwingungszahlen der Töne[1].

Der Leucitkörper endlich (siehe die nebenstehende Figur) *hat (bei einerlei Flächen) dreierlei Ecken und zweierlei Kanten, folglich überhaupt nächst seiner kleinsten und größten Dimension vier mittlere in obigem Betracht, und die Größe dieser sämtlichen Dimensionen in folgender Reihe steigend: 1. die Linie aus dem Mittelpunkt senkrecht auf die Fläche (d. i. cf); 2. die Senkrechte auf die stumpfe Kante (d. i. cn); 3. die nach der stumpfen Ecke (d. i. cd); 4. die Senkrechte auf die schärfere Kante (d. i. cm); 5. die*

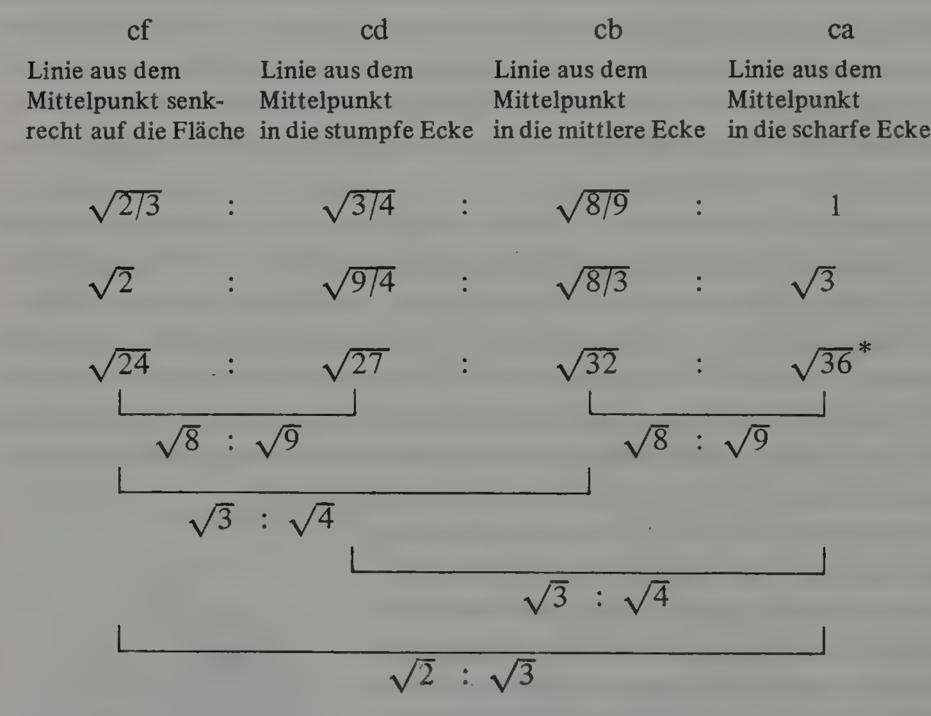


1) Chr. S. Weiss, Betrachtung der Dimensionsverhältnisse in den Hauptkörpern des sphäroedrischen Systems und ihren Gegenkörpern im Vergleich mit den harmonischen Verhältnissen der Töne, in: Abhandlungen der Kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin 1818, 1819, physikalisch-mathematische Classe, Berlin 1820, 227-241.

nach der mittleren Ecke (d. i. cb); endlich 6. die nach der scharfen Ecke (d. i. ca).

Das Verhältnis der Extreme in dieser Reihe ist das Verhältnis $\sqrt{2} : \sqrt{3}$*, d. i. das zweite abgeleitete von denen, welche im Würfel sowohl, als im Octaeder sich aus dem* $\sqrt{1} : \sqrt{3}$ *entspannen, und welches im Granatoeder zweimal durch dessen mittlere Dimensionen in das Verhältnis* $\sqrt{1} : \sqrt{2}$ *wiedereingetragen wurde.*

Nehmen wir fürs erste unter den vier mittleren Dimensionen des Leucitkörpers bloß auf die zwei Rücksicht, welche den Linien aus dem Mittelpunkt in die stumpfe und in die mittlere Ecke des Körpers entsprechen, so erhalten wir durch deren Zusammenstellung mit den Endgliedern – wenn ca = 1, so ist cf = $\sqrt{2/3}$*, cd =* $\sqrt{3/4}$ *und cb =* $\sqrt{8/9}$ *–, dem Schema des Granatoeders sehr analog, folgendes Schema dieser vier Dimensionen:*



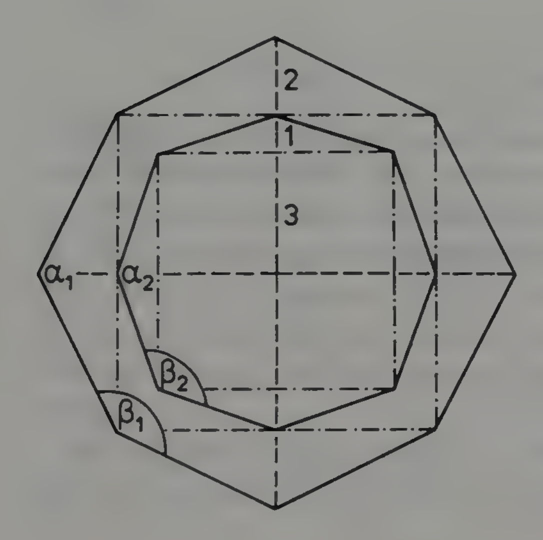
**Die nämlichen ganzen Zahlen 24, 27, 32, 36 entsprechen in unserer Tonleiter dem Verhältnis der Töne c d f g.*

Wenn auch das Ergebnis vom harmonikalen Standpunkt keine echte, d. h. r a t i o n a l e Lösung darstellt, war doch Weiss der erste, der eine übergreifende Beziehung zwischen den Kristallformen und den Tönen suchte.

Dabei ist die harmonikale Lösung am Beispiel des Ikositetraeders [211] auf Grund der von Weiss vorgegebenen Längenwerte recht einfach. Geht man von den Längen zwischen dem Mittelpunkt und den drei verschiedenen Ecken des Ikositetraeders aus und rechnet diese direkt auf das rechtwinklige Achsenkreuz um, so ergeben sich r a t i o n a l e und h a r m o n i k a l e Zahlenwerte:

Längenmaße nach Weiss (p. 232):

	Linie aus dem Mittelpunkt in die stumpfe Ecke		Linie aus dem Mittelpunkt in die mittlere Ecke		Linie aus dem Mittelpunkt in die scharfe Ecke
Längenverhältnisse:	$\sqrt{27}$	:	$\sqrt{32}$	:	$\sqrt{36}$
Umrechnung: $\sqrt{3}$ als Würfeldiagonale, $\sqrt{2}$ als Flächendiagonale	$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$	:	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$	:	$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{1}}$
Achsenverhältnisse:	3	:	4	:	6



Basisprojektion des Ikositetraeders [211]

$\alpha_1 + \beta_1 = 270^0$

$\cos\alpha_1 \doteq -3/5 \quad \cos\beta_1 = -4/5$

3–4–5

$\alpha_2 + \beta_2 = 270^0$

$\cos\alpha_2 = -4/5 \quad \cos\beta_2 = -3/5$

3–4–5

Die Abbildung des Ikositetraeders ist hier als Aufriß gezeichnet. Die dargestellten Knotenpunkte bilden die Ecken des Ikositetraeders.

Die beiden symmetrischen Achtecke sind schon im äußeren Habitus des Ikositetraeders zu erkennen und bilden die Grundlage für den zweifachen Nachweis pythagoreischer Zahlentripel sowie den Schlüssel für ihre harmonikale Bewertung.

Chr. S. Weiss berechnete die verschiedenen Längenmaße nicht nur für das Ikositetraeder [211], sondern auch für den Würfel, das Oktaeder, das Tetraeder, das Rhombendodekaeder und einige kristalline Kombinationskörper. Es ist selbstverständlich, daß bei einem Vergleich dieser Längen in einem Körper rationale und irrationale Werte nebeneinander auftreten müssen. Setzt man jedoch die verschiedenen Körper in einen mathematischen Bezug zu einem

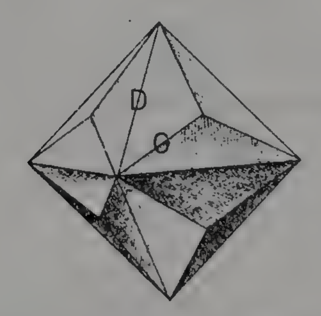
Grundkörper, wie ihn der Würfel darstellt, lassen sich darauf aufbauend die unterschiedlichen rationalen und irrationalen Längenmaße in ein harmonikales Ordnungssystem bringen.

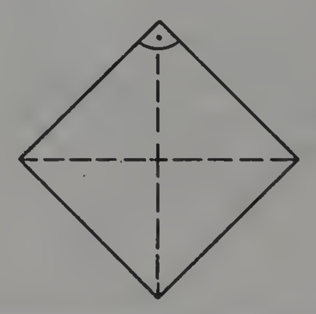
Die Ikositetraeder [211], [311] und [322] bilden auf Grund der hier auftretenden pythagoreischen Zahlen folgende harmonikale Verhältnisse:

Kristallindex	harmonikale Verhältnisse	pythagoreische Zahlen im inneren symm. Achteck	pythagoreische Zahlen im äußeren symm. Achteck
[211]	3/4 3/3 3/2	4–3–5	3–4–5
[311]	4/5 4/4 4/3	8–15–17	4–3–5
[322]	5/7 5/5 5/3	21–20–29	5–12–13

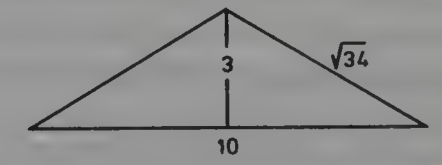
Pyramidenoktaeder oder Trisoktaeder [hkl] $h = k > l$

Die Pyramidenoktaeder sind von 24 gleichschenkligen Dreiecken begrenzt und haben 36 Kanten und 14 Ecken. Man kann das Pyramidenoktaeder als ein Oktaeder ansehen, auf dessen Flächen dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen wie die Oktaederflächen aufgesetzt sind[1].





Das erste Pyramidenoktaeder [221] besteht aus Dreiecksflächen folgender Art:



Die äußeren Winkel[2] an den beiden Pyramidenoktaedern [221] und [331] betragen:

1) Abbildung nach Brückner,
2) W. H. Miller, 33.

	Neigung der Flächen in den Kanten D		Neigung der Flächen in den Kanten G	
		$\cos_D = \frac{2h^2 - k^2}{2h^2 + k^2}$		$\cos_G = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2}$
[221]	141°3'	cos = −7/9	152°44'	cos = −8/9
[331]	153°28'	cos = −17/19	142°8'	cos = −15/19

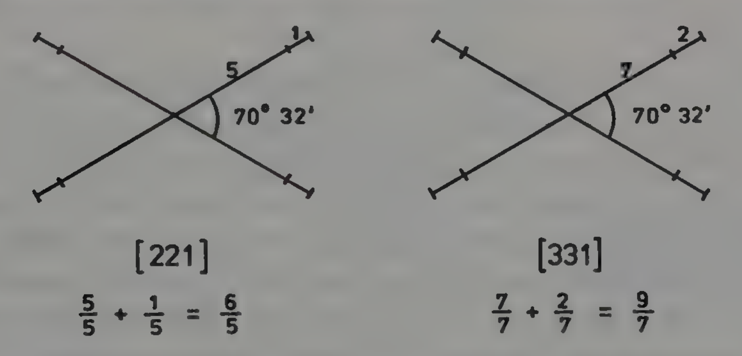
Die von MILLER angegebenen Formeln zur Bestimmung der Winkel an den Kanten D und G des Pyramidenoktaeders lassen erkennen, daß hier eine abgewandelte Form des „Pythagoras" vorliegt.

Kante D:

	$(2h^2 - k^2)^2$	+	$2 \cdot (2hk)^2$	=	$(2h^2 + k^2)^2$
z. B. [221]	7^2	+	$2 \cdot 4^2$	=	9^2
[331]	17^2	+	$2 \cdot 6^2$	=	19^2

Die räumlichen Höhen der dreiseitigen Pyramiden der Pyramidenoktaeder [221] und [331] betragen 1/5 und 2/7 der halben rhomboedrischen Achse des eingeschriebenen Oktaeders. Die rhomboedrische Achsendiagonale geht durch die Mitte der Oktaederfläche bzw. durch die 8 Ecken des eingeschriebenen Würfels.

Das rationale Zahlenverhältnis der beiden ersten Pyramidenoktaeder [221] und [331] an den rhomboedrischen Achsendiagonalen ergibt:



Das allgemeine Prinzip der rationalen Erweiterung der rhomboedrischen Achsendiagonalen für alle Pyramidenoktaeder ist:

[hkl] $\qquad h = k > 1 \qquad \frac{h-1}{h+k+1}$

Man erkennt schon aus diesen beiden Beispielen, daß die rationale Erweiterung der rhomboedrischen Achsen des Oktaeders k e i n e harmonikalen Verhältnisse oder Intervalle bildet, wie dies am Beispiel der rationalen Erweiterung des Würfels der Fall war, was zu den entsprechenden Pyramidenwürfeln oder Pentagondodekaedern führte. Beim Oktaeder sind es die rhomboedrischen Achsen, die erweitert werden und zu den Pyramidenoktaedern führen, während die rechtwinkligen Achsendiagonalen unverändert bleiben. Der Schnitt durch die Ebene des Achsenkreuzes bildet so ein Quadrat, das mit dem des Oktaeders identisch bleibt. Dies ist der Grund, daß am Pyramidenoktaeder wie auch am Deltoiddodekaeder, das ja den gleichen Kristallindex besitzt, k e i n e pythagoreischen Zahlentripel in den Winkelfunktionen der Begrenzungswinkel des Achsenkreuzes auftreten können.

Dadurch kommt es zu dem Phänomen, daß zwei Kristallkörper wie das Ikositetraeder (z. B. [211]) und das Pyramidenoktaeder (z. B. [221]) in den Kristallindizes die gleichen Zahlen enthalten können und dennoch nur am Ikositetraeder pythagoreische Zahlentripel in der äußeren Begrenzung des Schnittes durch die Ebene des Achsenkreuzes auftreten können. Dies Problem wird bei der Thematik des „Pythagoras im Raum" im Zusammenhang mit den Kristallindizes (Seite 118) noch zu erörtern sein.

Es bleibt noch nachzutragen, daß die verschiedenen Varianten der Pyramidenoktaeder (flache, mittlere und steile Formen) sich ebenfalls in eine Zonenreihe einordnen lassen, die in die Grenzkörper Rhombendodekaeder und Oktaeder eingebunden ist.

Oktaeder ← flacher — Pyramiden-oktaeder — steiler → Rhomben-dodekaeder

	Oktaeder							Rhomben-dodekaeder
Kristallindex [hkl] h = k > l:	[111]	[332]	[553]	[221]	[331]	[441]	[551]	[110]
Zahlenpaar k/l:		3/2	5/3	2/1	3/1	4/1	5/1	
rationale Erweiterung der rhomboedr. Achse:	1/∞	1/8	2/13	1/5	2/7	3/9	4/11	1/2

Da jedoch in den Pyramidenoktaedern keine pythagoreischen Zahlentripel auftreten können, kann es auch keine zwei Körper dieser Art geben, die sich in den Winkelfunktionen komplementär ergänzen, wie dies bisher als besonderes Kriterium herausgestellt wurde. Hier muß deshalb auf die Zahlenpaare der Kristall-

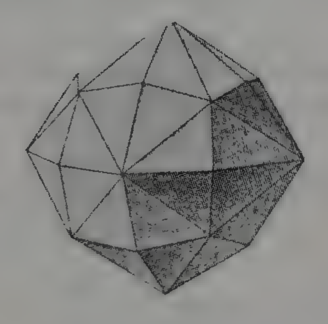
indizes, die sich ebenfalls zur komplementären Einheit verbinden lassen, zurückgegriffen werden.

Es muß auch in dieser Zonenreihe von Oktaeder bis Rhombendodekaeder den Kreuzungspunkt ⤨ zweier sich gegenseitig durchdringender Reihen geben, da dies ein wichtiges Kennzeichen für die Komplementarität darstellt. Die Grenzwinkel der rhomboedrischen Achsen betragen in der Spitze des Oktaeders $70^0 32'$, cos = 1/3, in der Spitze des Rhombendodekaeders 120^0, cos = –1/2, und im speziellen Fall des inneren Kreuzungspunktes ⤨ 90^0.

Der Begrenzungswinkel von 90^0 bildet am rechtwinkligen Achsenkreuz ein rationales und harmonikales Verhältnis (2/1 = Oktave), während der gleiche Winkel am rhomboedrischen Achsenkreuz des Pyramidenoktaeders zu einem irrationalen Verhältnis führt und folglich nicht in einem kristallinen Pyramidenoktaeder auftreten kann.

Hexakisoktaeder [hkl] $h > k > l$

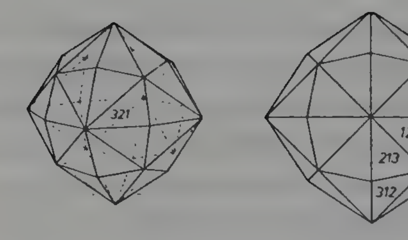
Die Hexakisoktaeder sind von 48 ungleichseitigen Dreiecken begrenzt und haben 26 Ecken und 72 Kanten[1].



[321]

Das Hexakisoktaeder kommt sowohl als vollflächige Form als auch in Kombinationen mit anderen Kristallkörpern relativ häufig vor. Es gehört zu einer Gruppe von fünf Körpern, die alle den gleichen Kristallindex haben, aber je nach Mineralart oder Klasse verschieden aussehen (siehe die Seiten 83 und 88). Das gemeinsame Strukturmerkmal dieser fünf Körper ist der Begrenzungswinkel α des Achsenkreuzes. Am Beispiel des Hexakisoktaeders läßt sich wiederum das komplementäre Prinzip der Außenwinkel am Einzelkörper und an zwei paarweise zusammengehörigen Körpern auf einfache Weise darstellen[2] (siehe die nächste Seite).

1) Abbildung nach Brückner.
2) Abbildung nach Ramdohr/Strunz, 34f.



Basisprojektion des Hexakisoktaeders [321]

$\cos\alpha = -5/13 \qquad \cos\beta = -12/13$

5–12–13

Der Schnitt durch die Achsenebene des Hexakisoktaeders ist bei gleichen Zahlen h und k im Kristallindex identisch mit dem des Pyramidenwürfels und Ikositetraeders und führt zu gleichen pythagoreischen Zahlen:

		[hkl]	Zahlenpaar (h/k)	h^2-k^2	2hk	h^2+k^2
z. B. Pyramidenwürfel	$h > k0$:	[320]	3/2	5	12	13
Ikositetraeder	$h > k = 1$:	[322]	3/2	5	12	13
Hexakisoktaeder	$h > k > 1$:	[321]	3/2	5	12	13

Weitere Beispiele von Hexakisoktaedern lassen den Zusammenhang von Kristallindizes und pythagoreischen Zahlen besser erkennen.

Hexakisoktaeder	Begrenzungswinkel		pythagoreische Zahlen		
$h > k > l$	α	β	h^2-k^2	2hk	h^2+k^2
[421]	cos = –3/5	cos = –4/5	3	4	5
[321]	cos = –5/13	cos = –12/13	5	12	13
[432]	cos = –7/25	cos = –24/25	7	24	25
[543]	cos = –9/41	cos = –40/41	9	40	41
[621]	cos = –4/5	cos = –3/5	4	3	5

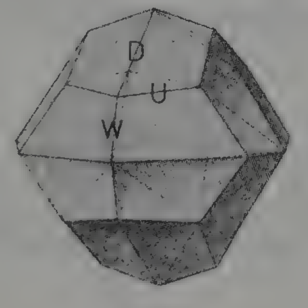
Es gibt aber auch grundsätzlich zwei Hexakisoktaeder, deren Außenwinkel α_1 und α_2 bzw. β_1 und β_2 sich komplementär zu 270^0 ergänzen. Das Beispiel der beiden Hexakisoktaeder [421] und [621] macht dies deutlich, wobei nur die äußere Begrenzung dieser Körper als Schnitt durch die Achsenebene dargestellt ist.

	$\cos\alpha = -3/5$ $\cos\beta = -4/5$		$\cos\alpha = -4/5$ $\cos\beta = -3/5$
		3–4–5	
Kristallindex:	[421]		[621]
Zahlenpaar h/k:	2/1		3/1

Es liegt also, soweit es die Achsenebene betrifft, eine Analogie zu den Pyramidenwürfeln und Ikositetraedern vor. Doch muß bei den Hexakisoktaedern berücksichtigt werden, daß mit den erweiterten Diagonalen, die über die Mitte der Oktaederfläche hinaus zu sechsseitigen Pyramiden führen, weitere harmonikale Elemente hinzukommen. Aus diesem Grunde ist auch hier keine harmonikale Zuordnung vorgenommen worden, da dies erst in einem Gesamtsystem, das alle Diagonalen mit einschließt, möglich ist.

Disdodekaeder [hkl] $h > k > l$

Die Disdodekaeder sind von 24 unregelmäßigen Trapezoiden begrenzt und haben 48 Kanten und 26 Ecken. In ihrem äußeren Aussehen ähneln sie dem Pentagondodekaeder[1].



[321]

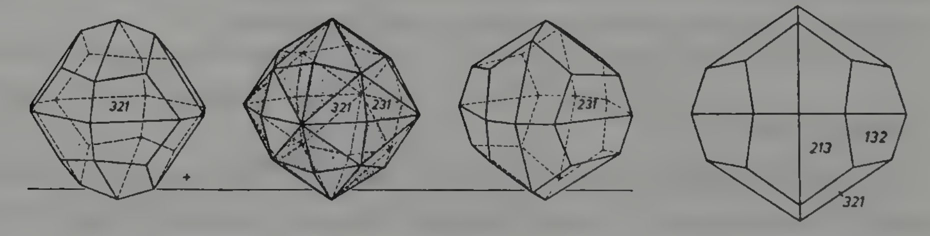
Die gestrichelten Linien in der Abbildung des Disdodekaeders deuten die Flächen des Hexakisoktaeders an, wobei die Beziehung zwischen diesen beiden Körpern im gleichen Kristallindex zum Ausdruck kommt.

1) Abbildung nach Brückner.

Das Disdodekaeder kommt beim Pyrit und anderen Mineralien vor, jedoch selten als vollflächiger Körper, sondern zumeist in der Kombination mit anderen Körpern. Die Neigung der Flächen in den Kanten führt zu folgenden Winkeln[1]:

	$\cos_D = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2}$	$\cos_W = \frac{h^2 - k^2 + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}$	$\cos_U = \frac{kl + lh + hk}{h^2 + k^2 + l^2}$
[321]	149°0'	115°23'	141°47'
[421]	154°47'	128°15'	131°49'
[531]	160°32'	118°59'	131°5'

Aus diesen Angaben lassen sich die beiden Begrenzungswinkel des Achsenkreuzes berechnen, die in der Spitze zweier gegenüberliegender Kanten liegen. Dabei ergibt sich die Besonderheit, die im kubischen Kristallsystem nur am Disdodekaeder vorkommt: daß gleichzeitig zwei verschiedene pythagoreische Zahlentripel in der Begrenzung des Achsenkreuzes auftreten, die um 90° versetzt sind[2].



Die Disdodekaeder [hkl] (positiv) und [khl] (negativ)
und, Mitte, ihre Beziehung zum Hex'oktaeder

[321]	$\cos\alpha = 5/13$	$\cos\beta = 4/5$
	5–12–13	3–4–5

Einige weitere Beispiele von Disdodekaedern sollen diesen Sachverhalt noch verdeutlichen:

[hkl]		
[421]	$\cos\alpha = 3/5$	$\cos\beta = 15/17$
	3–4–5	8–15–17

1) W. H. Miller, 34.
2) Abbildung nach Ramdohr/Strunz, 39.

[432]	$\cos\alpha = 7/25$	$\cos\beta = 3/5$
	7–24–25	3–4–5
[531]	$\cos\alpha = 8/17$	$\cos\beta = 12/13$
	8–15–17	5–12–13
[543]	$\cos\alpha = 9/41$	$\cos\beta = 8/17$
	9–40–41	8–15–17

Aus den angeführten Beispielen ist auch das allgemeine Prinzip erkennbar, indem die ersten beiden Zahlen h, k der Kristallindizes zum Begrenzungswinkel α und die Zahlen h, l zum Begrenzungswinkel β führen. Beide Begrenzungswinkel lassen sich in ihren Winkelfunktionen pythagoreischen Zahlentripeln zuordnen.

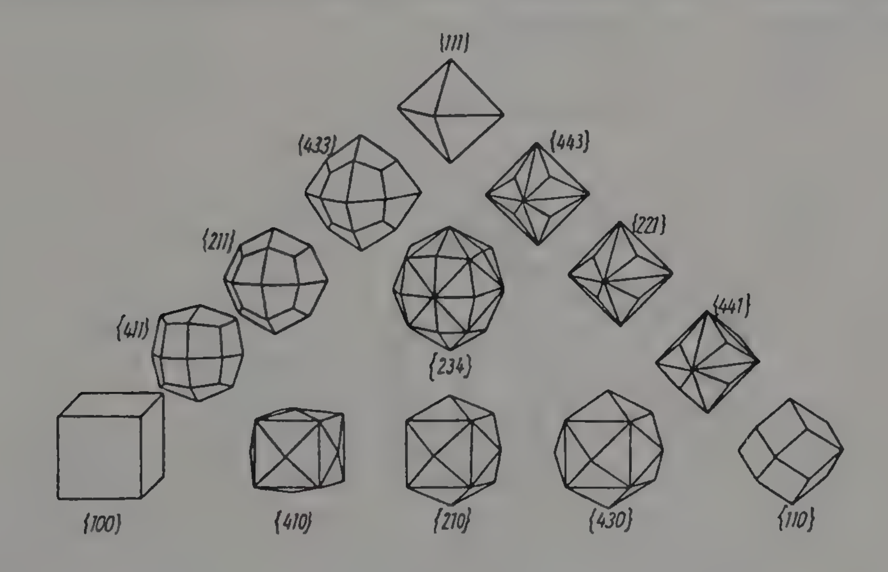
Um einen besseren Überblick zu gewinnen, werden die Kristallkörper in den Zonenreihen

Würfel – Pyramidenwürfel – Rhombendodekaeder

Würfel – Ikositetraeder – Oktaeder

Oktaeder – Pyramidenoktaeder – Rhombendodekaeder

noch einmal zusammengefaßt[1].

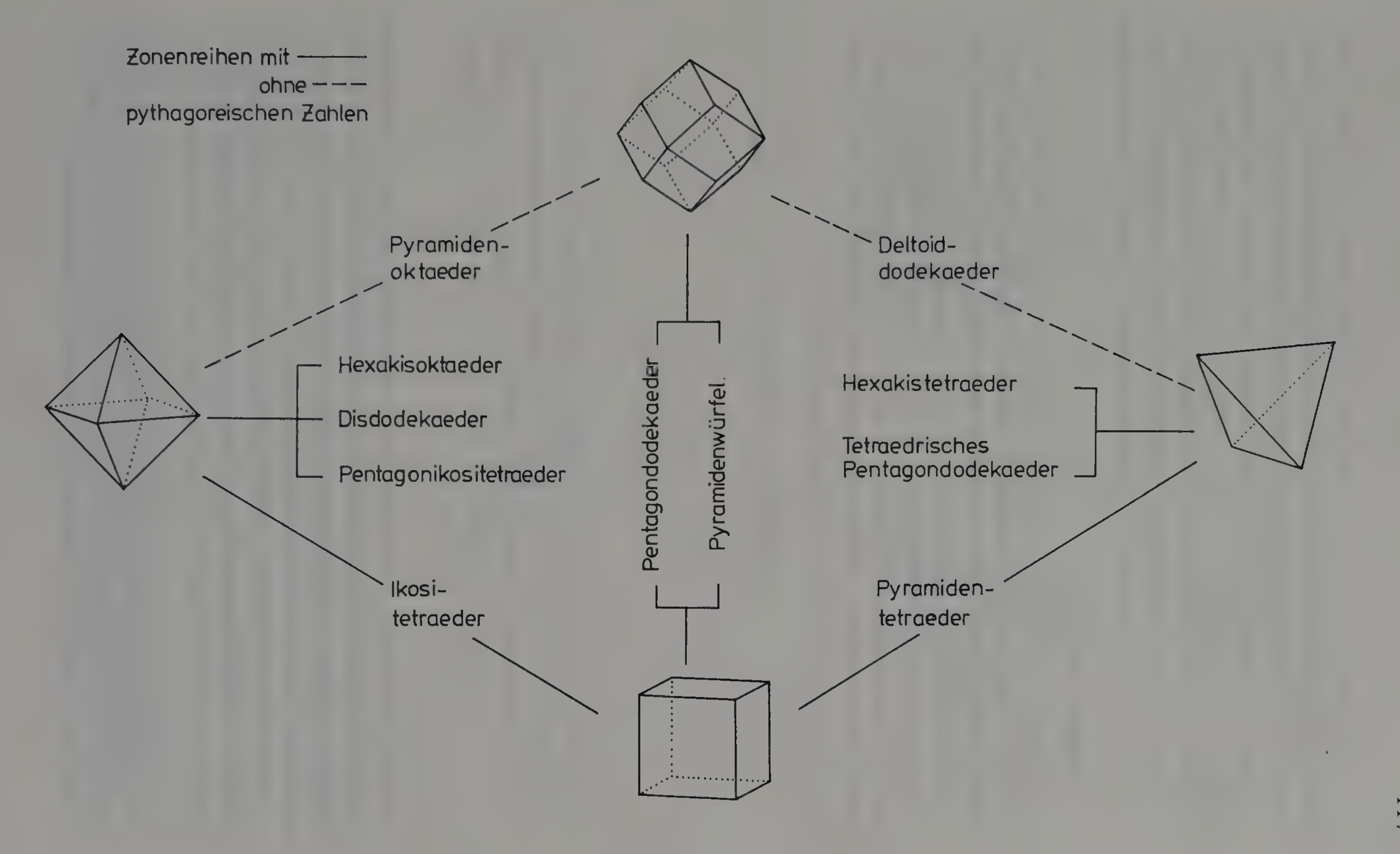


Dabei erkennt man die fließenden Übergänge innerhalb der einzelnen Zonenreihen, die durch weitere Kristallkörper noch differenziert werden können. Es können bei einzelnen Mineralien durchaus 30 und mehr rationale Modifikationen von Kristallkörpern in den einzelnen Zonenreihen vorkommen. Allerdings hängt die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Zwischenkörper in hohem

1) Nach: E. Fischer, Einführung in die geometrische Kristallographie, Berlin 1956, 162.

Maße von der Zahlengröße der Kristallindizes ab.

In der bisherigen Darstellung der Körper im kubischen Kristallsystem wurde besonderer Wert darauf gelegt, die pythagoreischen Zahlentripel als ein allgemeingültiges komplementäres Strukturprinzip herauszustellen. Im Fall der Pyramidenoktaeder, in denen diese nicht auftreten können, mußte auf die Zahlenpaare zurückgegriffen werden. Dies war nur möglich, weil nachgewiesen werden konnte, daß zwischen den Zahlen der pythagoreischen Zahlentripel, Kristallindizes, Zahlenpaaren und komplementären Intervallen eine direkte mathematische Beziehung besteht. Es liegen somit drei verschiedene Zahlenebenen vor, die sich am Achsenkreuz bzw. im Raum konkret darstellen lassen. Diese Wechselbeziehungen sind ein elementares Kernstück dieser Abhandlung. Alle mathematischen und harmonikalen Elemente sind jedoch nur innerhalb eines begrenzten Raumes denkbar, wie ihn die verschiedenen Zonenreihen zwischen den Grenzkörpern Würfel, Oktaeder, Tetraeder und Rhombendodekaeder darstellen. Die Zonenreihen, die das Tetraeder als Grenzkörper haben, wurden nicht behandelt, da strukturell ähnliche Zusammenhänge bestehen wie im Fall des Oktaeders. Dies geht schon aus der Ähnlichkeit der Kristallindizes hervor. Die Tabelle auf Seite 117 gibt einen Gesamtüberblick über die Grenz- und Zwischenkörper in allen Zonenreihen des kubischen Kristallsystems. Aus dem Schema geht auch hervor, in welchen Zonenreihen pythagoreische Zahlentripel auftreten können.

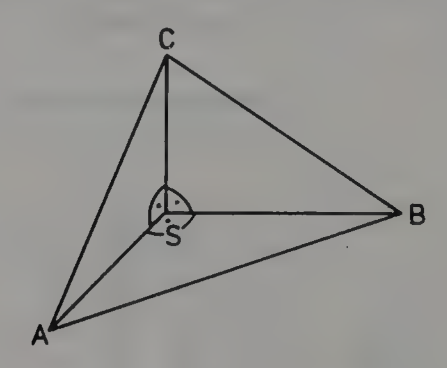

Zonenreihen mit
ohne
pythagoreischen Zahlen
Pyramiden-
oktaeder
Deltoid-
dodekaeder
Hexakisoktaeder
Disdodekaeder
Pentagonikositetraeder
Pentagondodekaeder
Pyramidenwürfel.
Hexakistetraeder
Tetraedrisches
Pentagondodekaeder
Ikosi-
tetraeder
Pyramiden-
tetraeder

Pythagoras im Raum

Die Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes im harmonikalen Sinn wirft die Frage nach der Übertragung auf den *Pythagoras im Raum* auf. Dieser bildet das räumliche Analogon des pythagoreischen Lehrsatzes und wird auch als *räumlicher Kosinussatz* bezeichnet.

Der *räumliche Pythagoras* besagt: Begrenzt man eine dreiseitige, von drei rechten Winkeln gebildete Ecke durch eine vierte Ebene, so ist in dem entstehenden rechtwinkligen Tetraeder die Summe der Quadrate der drei Kathetenflächen gleich dem Quadrat der Hypotenusenfläche:

$$SAB^2 + SAC^2 + SBC^2 = ABC^2$$



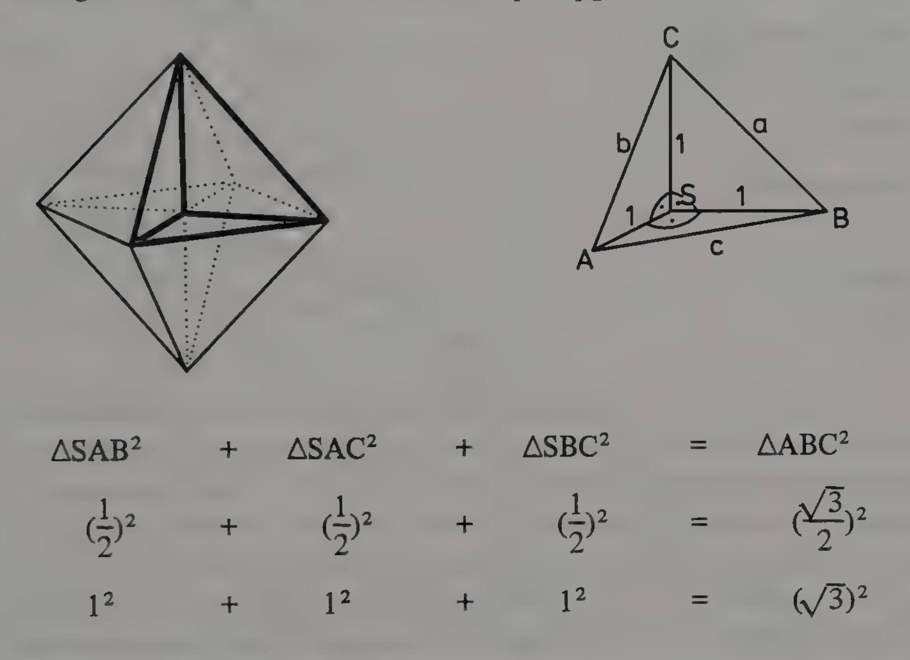
Der Satz geht in seiner einfachsten Form auf FAULHABER zurück, der ihn erstmals 1622 in seinen „Miracula arithmetica" veröffentlichte. Er wurde später auf das allgemeine und nichtrechtwinklige Tetraeder erweitert (TINSEAU 1780, DE GUA 1783)[1].

Es ist für die vorliegende Thematik von besonderem Interesse, daß sich der räumliche Pythagoras durch seine Beziehung zu den Kristallindizes direkt auf

1) H. Wieleitner, Der räumliche pythagoreische Lehrsatz, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 49, 1918, 321f; M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrhundert, Leipzig 1906, 112; J. Naas und H. L. Schmid, Mathematisches Wörterbuch, Berlin-Stuttgart 1965³, I 1007, II 418.

das rechtwinklige Achsenkreuz der kubischen Kristallkörper anwenden läßt. Er bildet die Grundlage für die Projektion einer bestimmten Fläche eines Kristallkörpers auf das rechtwinklige und dreidimensionale Achsenkreuz. Die Kristalle bilden damit den idealen Anwendungsbereich für den Pythagoras im Raum.

Den einfachsten Fall seiner Anwendung stellt die Projektion einer gleichseitigen Dreiecksfläche auf das rechtwinklige Achsenkreuz dar. Durch die Projektion aller acht Flächen und die entsprechende Zusammensetzung der acht rechtwinkligen Tetraeder wird das Oktaeder [1 1 1] gebildet.



$$\Delta SAB^2 + \Delta SAC^2 + \Delta SBC^2 = \Delta ABC^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$1^2 + 1^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2$$

Um allgemein das Dreieck ABC zu berechnen, kann man zunächst mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes die einzelnen Seiten a, b und c aus den Seitenflächen der rechtwinkligen Ecke finden und anschließend diese Werte in die Heronische Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks einsetzen.

$$F_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Die Projektion des gleichseitigen Dreiecks des Oktaeders auf das rechtwinklige Achsenkreuz führt zu gleichen rationalen Abständen, wie dies schon durch den Kristallindex [1 1 1] anschaulich zum Ausdruck kommt.

Das mathematische Prinzip der Projektion der Einzelflächen auf das rechtwinklige Achsenkreuz läßt sich auf alle Körper des kubischen Kristallsystems anwenden. Dies bedeutet, daß bei Körpern mit gleichem Kristallindex die Teilungspunkte auf dem Achsenkreuz trotz ihres unterschiedlichen Habitus identisch sind. So stellt der räumliche Pythagoras am rechtwinkligen Tetraeder eine wertvolle Ergänzung des pythagoreischen Lehrsatzes und seiner harmonikalen

Interpretation dar.

Zwischen dem *Pythagoras des Raumes* und den Millerschen hkl-Werten der Kristallindizes besteht folgende allgemeine Beziehung:

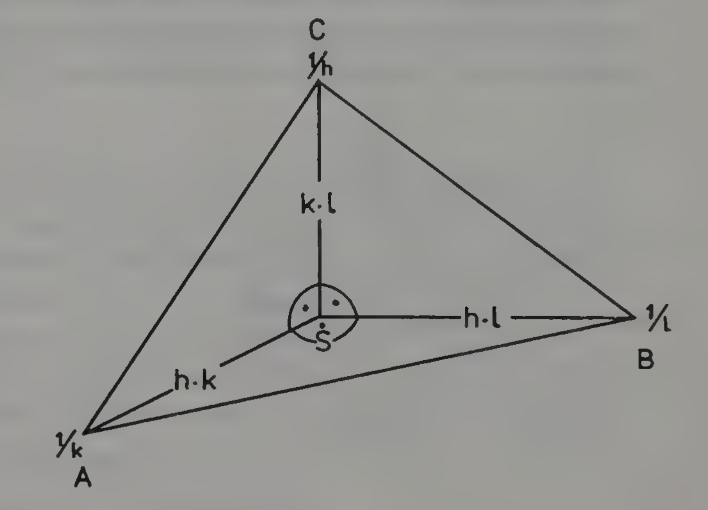
rechtwinkliges Tetraeder

Kristallindex: [hkl][1]

reziproke Werte: $\frac{1}{h}\ \frac{1}{k}\ \frac{1}{l}$

Zahlenpaare:

hk/kl
hl/hk
hl/kl



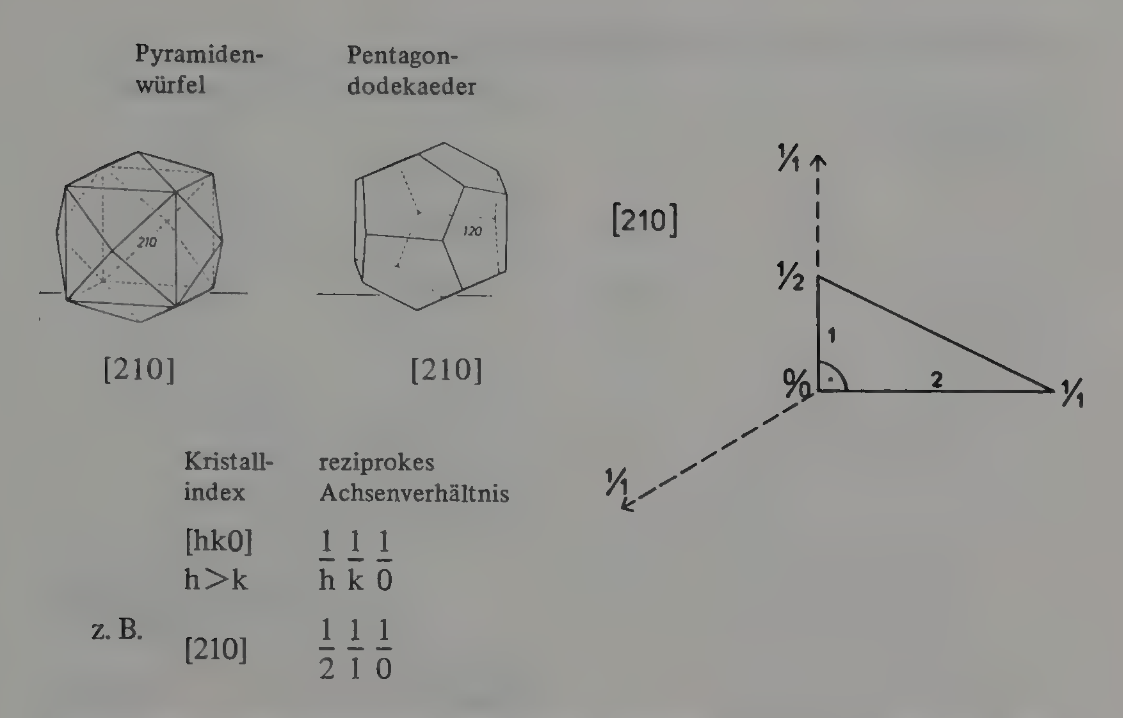
$$\Delta SAB^2 + \Delta SAC^2 + \Delta SBC^2 = \Delta ABC^2$$

$$h^2 + k^2 + l^2 = d^2$$

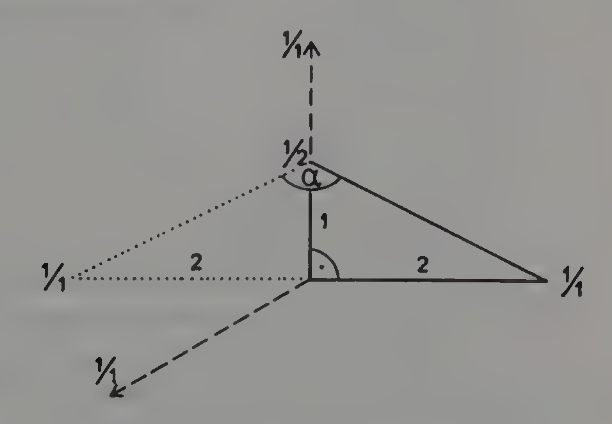
$$d^2 = \Delta ABC^2 = (\sqrt{h^2 + k^2 + l^2})^2$$

Als Beispiele für den *Pythagoras im Raum* werden nun verschiedene Kristallkörper aus den einzelnen Gruppen ausgewählt, wobei jeweils nur eine Kristallfläche auf den rechtwinkligen Ausschnitt des Achsenkreuzes projeziert wird und dadurch ein rechtwinkliges Tetraeder entsteht. Dabei kommt auch der mathematische Zusammenhang zum Vorschein, der zwischen den Zahlen der Millerschen Kristallindizes, den reziproken Zahlenverhältnissen auf dem Achsenkreuz und dem Pythagoras im Raum besteht.

1) Es ist aus drucktechnischen Gründen nicht möglich, zwischen dem Buchstaben und der Zahl 1 zu differenzieren. Der Unterschied geht jedoch aus dem Zusammenhang eindeutig hervor.



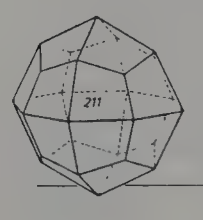
Am Pyramidenwürfel und am Pentagondodekaeder [210] wird deutlich, daß die Projektion der jeweiligen (210)-Fläche nur zur Ausbildung eines rechtwinkligen Dreiecks zwischen zwei Achsen führt, was durch die Null im Kristallindex ausgedrückt ist. Hier kommt somit nur der einfache pythagoreische Lehrsatz zur Geltung, wodurch die harmonikale Interpretation der Kristallindizes sehr vereinfacht wird. Das pythagoreische Zahlentripel 3–4–5 ergibt sich hier nicht nur arithmetisch aus dem Zahlenpaar (2/1) und seiner Umrechnung über die pythagoreische Formel, sondern auch geometrisch durch die Projektion zweier (210)-Flächen, die sich symmetrisch gegenüberliegen.



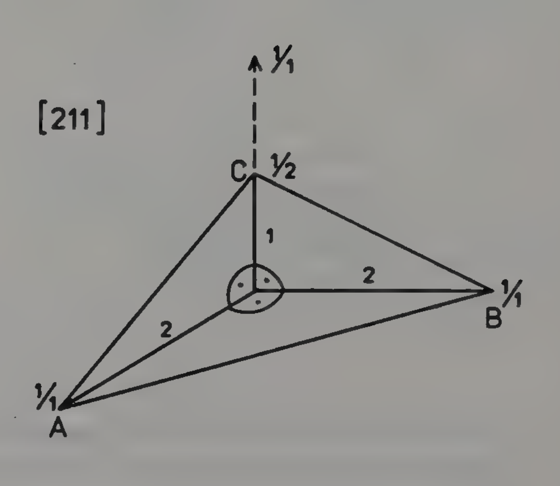
Bei den folgenden Beispielen tritt das rechtwinklige Tetraeder, und damit der räumliche Pythagoras, auf. Er kommt durch die dritte Zahlenkomponente l im Kristallindex [hkl] zustande und führt auch auf der dritten Achse des

Achsenkreuzes zu einem rationalen Abschnitt.

Ikositetraeder:



[211]



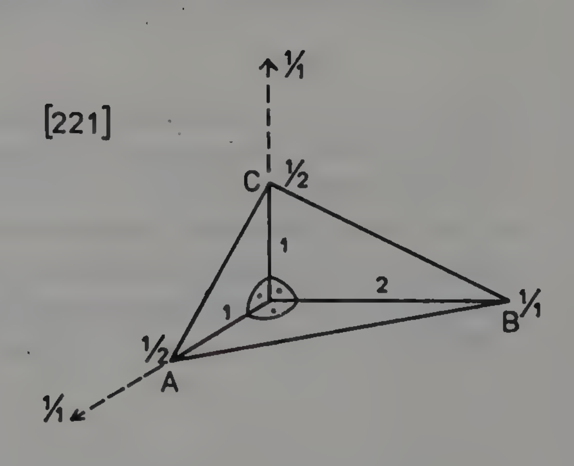
	Kristall-index	reziproke Werte
	[hkl] $h > k = 1$	$\frac{1}{h}\ \frac{1}{k}\ \frac{1}{l}$
z. B.	[211]	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$

$\Delta ABC^2 = h^2 + k^2 + l^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2$

Pyramidenoktaeder

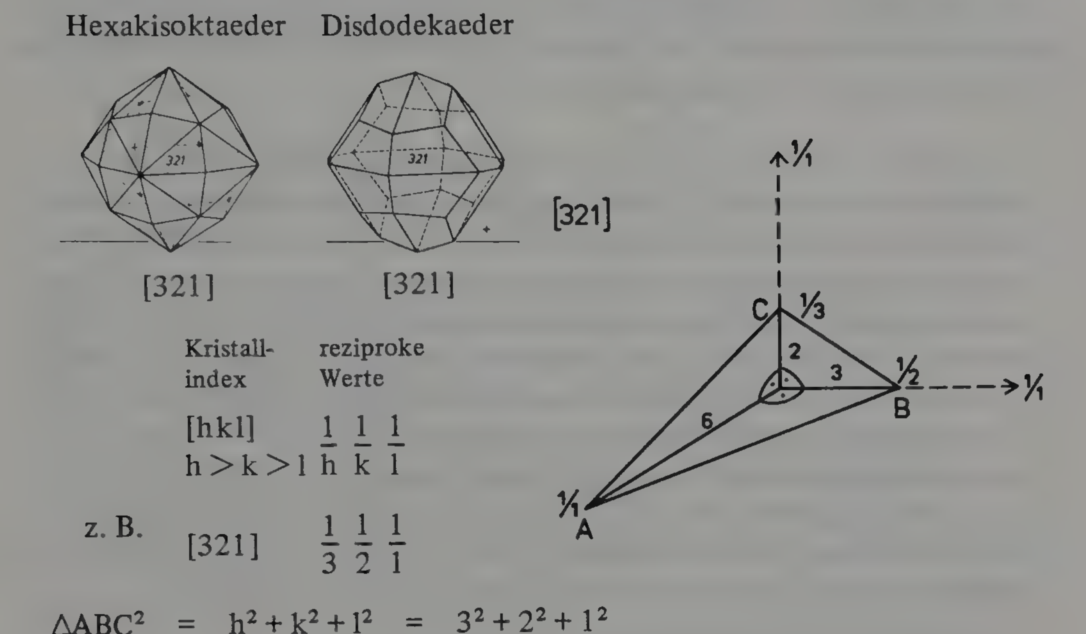


[221]



	Kristall-index	reziproke Werte
	[hkl] $h = k > 1$	$\frac{1}{h}\ \frac{1}{k}\ \frac{1}{l}$
z. B.	[221]	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$

$\Delta ABC^2 = h^2 + k^2 + l^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$



$$\triangle ABC^2 = h^2 + k^2 + l^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Die rationalen Abschnitte auf den rechtwinkligen Achsen entsprechen den Weiss'schen Koeffizienten, wie dies auch aus der Tabelle auf Seite 29 hervorgeht. Die verschiedenen Darstellungen der rechtwinkligen Tetraeder, die sich aus der jeweiligen Projektion einer einzelnen Fläche jedes (kubischen) Kristallkörpers ergeben, lassen den Zusammenhang von Kristallindizes, Zahlenpaaren und dem räumlichen Pythagoras erkennen. Dies führt zu einer vereinfachten Möglichkeit, die Zahlen der Kristallindizes auf das Achsenkreuz zu projezieren. Doch läßt sich durch eine solche Beschreibung über das rechtwinklige Tetraeder nicht erklären, warum z. B. am Hexakisoktaeder [321] nur ein pythagoreisches Dreieck, 5–12–13, und am Disdodekaeder mit dem gleichen Kristallindex zusätzlich noch ein zweites, 3–4–5, auftritt (siehe Seite 112ff). Aus diesen beiden Beispielen wird schon ersichtlich, daß für eine morphologische und harmonikale Untersuchung der ganze Kristallkörper behandelt werden muß und nicht auf einen Teilaspekt, wie ihn der Pythagoras im Raum darstellt, beschränkt werden kann.

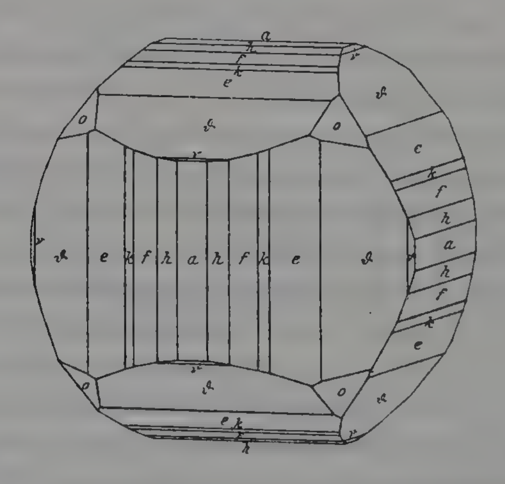
In einer solchen ganzheitlichen Beschreibung der (kubischen) Kristallkörper zeichnen sich die Konturen einer harmonikalen Interpretation auch der komplizierteren Kristallkörper über die pythagoreischen Zahlentripel und Zahlenpaare in den Kristallindizes ab, indem diese innerhalb des Oktavenraums eingebunden werden. So gesehen stellt auch der räumliche Pythagoras eine wesentliche Ergänzung in der morphologischen Untersuchung der Kristallkörper dar, vor allem wenn man noch seine häufige Anwendung innerhalb der Röntgenstrukturanalyse von Kristallen in diesen Komplex miteinbezieht. Die Beschrei-

bung der kubischen Einzelkörper wäre somit abgeschlossen. Im Anhang ist noch ergänzend eine Tabelle beigefügt (Seite 233), in der alle Körper des kubischen Kristallsystems mit ihren Flächen, Ecken und Kanten im Zusammenhang mit der Eulerschen Formel aufgeführt sind.

Es bleibt in diesem Kapitel der pythagoreischen Zahlen im kubischen Kristallsystem noch ein letzter Punkt übrig, der gerade für das Gesamtverständnis der Kristalle von besonderem Interesse ist. Die bisherige Form der Ableitung und Darstellung der einzelnen Phänomene ging im allgemeinen von den Einzelkörpern innerhalb einer Zonenreihe aus. Auf diese Weise ließ sich der kristallographische und harmonikale Zusammenhang einfach und anschaulich darstellen. Es ist jedoch so, daß in einer Zonenreihe keine Einzelkörper vorliegen, die wie auf einer Perlenschnur aufgereiht sind, sondern daß sie als Flächen Teil eines Zonenverbandes innerhalb eines Kristallkörpers sein müssen.

Die beiden folgenden Beispiele von Pyriten, in denen vor allem die Reihe der verschiedenen Pentagondodekaeder zu einer Differenzierung der Zonenreihe führt, sollen diesen strukturellen Zusammenhang verdeutlichen.

1) Beispiel eines Pyrits aus Kotterbach in Ungarn[1]



Dieser 2–2,5 mm messende Kristall ist von sehr regelmäßiger Ausbildung; neben der dominierenden Form (430) sind noch (210), (310), (410) und (100) in großen Flächen vorhanden. Dadurch hat der Kristall ein fast kugelförmiges, abgerundetes Äußeres, was noch verstärkt wird durch die schwach gekrümmten und gestreiften Flächen der Pentagondodekaeder (410) und (310). In der Zeichnung ist die streifenförmige Fläche von (920) wegge-

1) K. Zimanyi, Über Pyrit von Kotterbach im Comitat Szepes, in: Zeitschrift für Krystallographie 39, 1904, 132.

lassen. Die Kristallkombination wird von folgenden Formen gebildet:

ϑ [430]	h [410]
e [210]	o [111]
a [100]	k [520]
f [310]	v [650]

a [920]

Die Indizierung der Kristallflächen liegt sowohl in der Form der Millerschen Indizes als auch in der früher zusätzlich verwendeten Form der Buchstaben vor. Gerade bei engen und kleinen Kristallflächen bildete diese Form der Indizierung eine wesentliche Vereinfachung.

Die einzelnen Flächen sind zunächst nach ihrer Größe geordnet. Relativ groß ist in diesem besonderen Fall die Fläche (430), die harmonikal dem Verhältnis 7/4 entspricht. Werden die Kristallflächen der verschiedenen Pentagondodekaeder [hk0] nach ihrem Auftreten in der Zonenreihe und zusätzlich in der Oktavenreihe geordnet, so wird schon durch die harmonikale Darstellungsform der mathematische Zusammenhang der Abrundung in dieser Zone durch das progressive Ansteigen der Zahlen ersichtlich.

Zonenreihe:	Würfel	Pentagondodekaeder						Rhomben-dodekaeder
Kristall-indizes:	[100]	[410]	[310]	[520]	[210]	[430]	[650]	–
Oktaven-reihe	1/1	5/4	4/3	7/5	3/2	7/4	11/6	–
	1,00	1,25	1,33	1,40	1,50	1,75	1,83	
pythag. Zahlen		8	3	20	3	7	11	
		15	4	21	4	24	60	
		17	5	29	5	25	61	

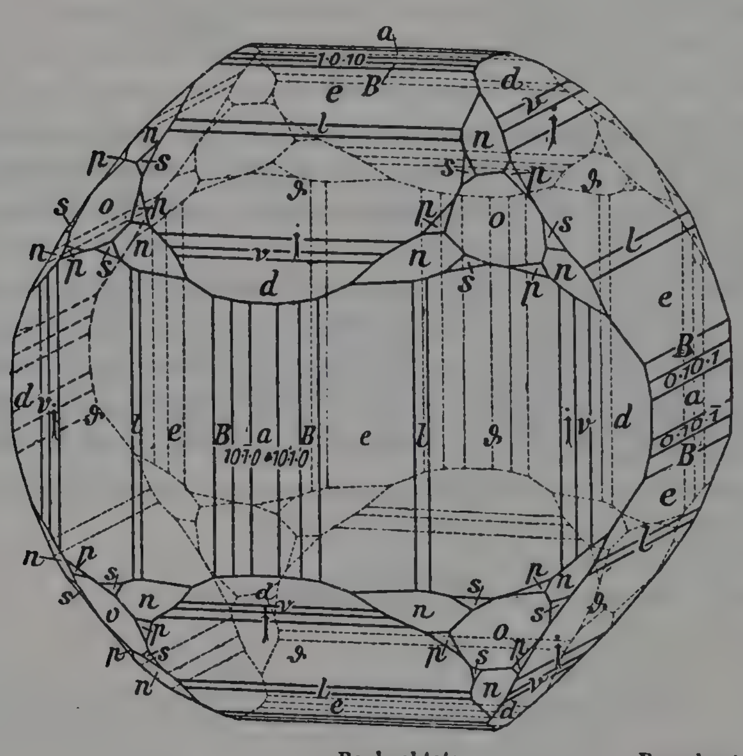
In diesem Beispiel führen die verschiedenen Pentagondodekaeder [hk0] zum pentagondodekaedrischen Habitus des Kristalls. Die Flächen des Würfels [100] und des Oktaeders [111] sind hier von untergeordneter Bedeutung.

2) Beispiel eines Pyritkristalls von Spanish Peaks in Colorado[1]

Dieser Pyritkristall zeichnet sich besonders durch die hohe Flächendifferenzierung aus, die zu dem kugelförmigen Habitus führt. Die auf Seite 126 abge-

1) K. Zimanyi, in: Zeitschrift für Krystallographie 51, 1913, 146-148.

bildete Form stellt ein typisches Beispiel für diesen Fundort dar. Man könnte eine Vielzahl solcher Abbildungen heranziehen, doch kommt es hier lediglich darauf an, das allgemeine Prinzip der einzelnen Kristallflächen in den verschiedenen Zonenreihen eines solchen Kombinationskörpers herauszustellen.



				Beobachtet:	n	Berechnet:
a:	= (100)	: (10.1.0)	=	5°47′	1	5°42¾′
: B	=	: (810)	=	7 4½	2	7 7½
: e	=	: (210)	=	26 32½	11	26 34
: l	=	: (530)	=	30 54½	1	30 57¾
: Γ	=	: (750)	=	35 39	1	35 32¼
: Ξ	=	: (19.14.0)	=	36 22	1	36 23
: ϑ	=	: (430)	=	36 53	11	36 52¼
: j	=	: (970)	=	37 52	5	37 52½
: ν	=	: (650)	=	39 47	9	39 48¼
: d	=	: (110)	=	44 58	15	45 0
o : a	= (111)	: (100)	=	54 45	3	54 44
: p	=	: (221)	=	15 51	3	15 47½
: d	=	: (110)	=	35 13	3	35 15¾
n : a	= (211)	: (100)	=	35 25	3	35 15¾
e : n	= (210)	: (211)	=	24 8	4	24 5¼
: p	=	: (212)	=	41 49	3	41 49
: s	=	: (213)	=	53 21	2	53 18
o : e	= (111)	: (210)	=	39 14	1	39 14
: s	=	: (321)	=	22 16	2	22 12½

Es treten an diesem Beispiel die Flächen der folgenden Kristallkörper auf, wobei diejenigen mit fettgedruckten Kristallindizes sich durch ihre Flächengröße von den anderen abheben.

Würfel **(100)**
Oktaeder **(111)**
Rhombendodekaeder **(110)**
Pentagondodekaeder **(210)** (430) (530) (650) (750) (810) (10 1 0) (19 14 0)
Ikositetraeder (211)
Pyramidenoktaeder (221)
Disdodekaeder (321)

Die zugrundeliegenden Einzelkörper gehören in diesem Kombinationskörper zu den Zonenreihen der Grenzkörper Würfel–Rhombendodekaeder–Oktaeder.

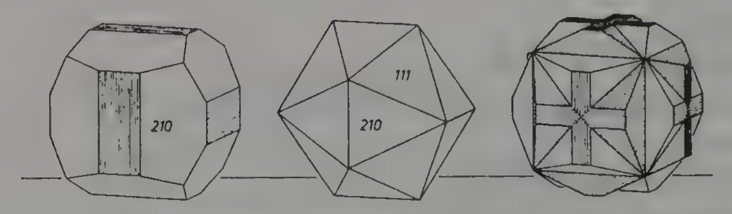
Zonenreihe: Würfel — Pentagondodekaeder — Rhombendodekaeder
(100) . . . (10 1 0)(810)**(210)**(530)(750)(19 14 0)(430)(970)(650) . . . **(110)**

Zonenreihe:			
Zonenreihe:	Würfel	Ikositetraeder	Oktaeder
	(100)	(211)	**(111)**
Zonenreihe:	Oktaeder	Pyramidenoktaeder	Rhomben dodekaeder
	(111)	(221)	**(110)**
Zonenreihe:	Oktaeder	Disdodekaeder	Pentagon-dodekaeder
	(111)	(321)	**(210)**

Ein Vergleich der gemessenen und berechneten Winkel zwischen den jeweiligen Kristallflächen gibt Auskunft über die Genauigkeit der Winkelmessungen. Aus diesen Winkelangaben lassen sich über die entsprechenden Formeln die zugehörigen Kristallindizes berechnen. Die pythagoreischen Zahlentripel treten in diesen Winkelangaben nur in versteckter Form auf, da in der Regel die Flächen zweier verschiedener Kristallkörper gemessen werden und nicht die der Einzelkörper. Dies muß bei den angeführten Winkeln berücksichtigt werden. So ist es durchaus möglich, daß der Winkel von 45^0 (135^0) zwischen den Flächen des Würfels [100] und des Rhombendodekaeders [110] auftritt, wie dies beim letzten Kombinationskörper aus der Tabelle hervorgeht. Dieser Winkel kann nur in der Kombination zweier verschiedener Körperflächen (100/110) gemessen werden. Am Einzelkörper dagegen würde der Winkel von 45^0 (135^0) den Kreuzungspunkt ⤨ einer Zonenreihe mit den äußeren Grenzwinkeln 90^0

und 180⁰ bedeuten und kann dementsprechend nicht vorkommen.

In den Kombinationskörpern kommen meist nur wenige Kristallflächen mit niedrigen Kristallindizes zur Entfaltung, wie dies auch aus den folgenden Beispielen am Pyrit hervorgeht[1].



Beispiele für Kombinationen [210] des Pyrits

Die hier auftretenden Zahlen in den Kristallindizes [210] und [321] führen zu den pythagoreischen Zahlentripeln 3–4–5 und 5–12–13 in den Begrenzungswinkeln der Einzelkörper Pentagondodekaeder [210] und Disdodekaeder [321].

An diesen Beispielen läßt sich schon erkennen, daß eine bestimmte Fläche je nach ihrer Größe untergeordnet oder dominierend und damit bestimmend für den Habitus des Kristalls sein kann. Das Auftreten der vielfältigen Grund- und Kombinationsformen in den Kristallen eines Minerals hängt im wesentlichen von den chemischen und physikalischen Bedingungen ab, die bei ihrer Entstehung vorherrschen.

Die auf das Grundsätzliche abzielende Darstellung der pythagoreischen Zahlen in den kubischen Kristallkörpern wäre damit abgeschlossen. Man muß dabei jedoch bedenken, daß die kubische Kristallklasse nur eine von sieben ist und in der Gesamtheit der Mineralien[2] nur einen Anteil von 12 % hat. Dies zeigt die Schwierigkeiten auf, die einer harmonikalen Interpretation aller Kristalle bzw. Mineralien noch im Wege stehen. Eine umfassende Kristallharmonik muß deshalb besonders die grundlegenden Arbeiten Victor GOLDSCHMIDTs einbeziehen. Er hat auf diesem Gebiet entscheidende Vorarbeiten geleistet. Kein Mineraloge oder Kristallograph war so vom harmonischen Aufbau der Kristalle überzeugt wie Goldschmidt. Bei ihm tritt erstmalig die Idee auf, die r e i n e n Intervalle der Musik in eine Beziehung zu bringen zu den Zahlenindizes der Kristalle und so eine Musiklehre zu entwickeln, die nicht allein im Menschen, sondern allgemein in der Natur ihren Ursprung hat.

Goldschmidt versuchte den Grundgedanken der Harmonie in den Kristallkörpern vom Prinzip der Komplikation aus zu entfalten. Es kann hier nicht im einzelnen auf seine Vorstellungen eingegangen werden. Doch soll das Wesent-

1) Abbildungen nach Ramdohr/Strunz, 39.
2) H. Strunz, Mineralogische Tabellen, Leipzig 1970, 14.

liche seiner Gedanken vorgestellt werden, um den grundsätzlichen Unterschied von *Komplikation* und *Komplementarität,* der schon im kristallographischen Grundprinzip enthalten ist, auf einfache Weise darzustellen[1]. Denn dadurch ist das Harmonieprinzip auf unterschiedlichen Vorstellungen aufgebaut, die bei gleichen Kristallkörpern zu vollkommen verschiedenen harmonikalen Inhalten führen müssen.

Von Goldschmidts harmonischen Grundgedanken waren es insbesondere drei Punkte, die auch für die vorliegende Thematik richtungsweisend waren und deshalb hier vorgestellt werden:

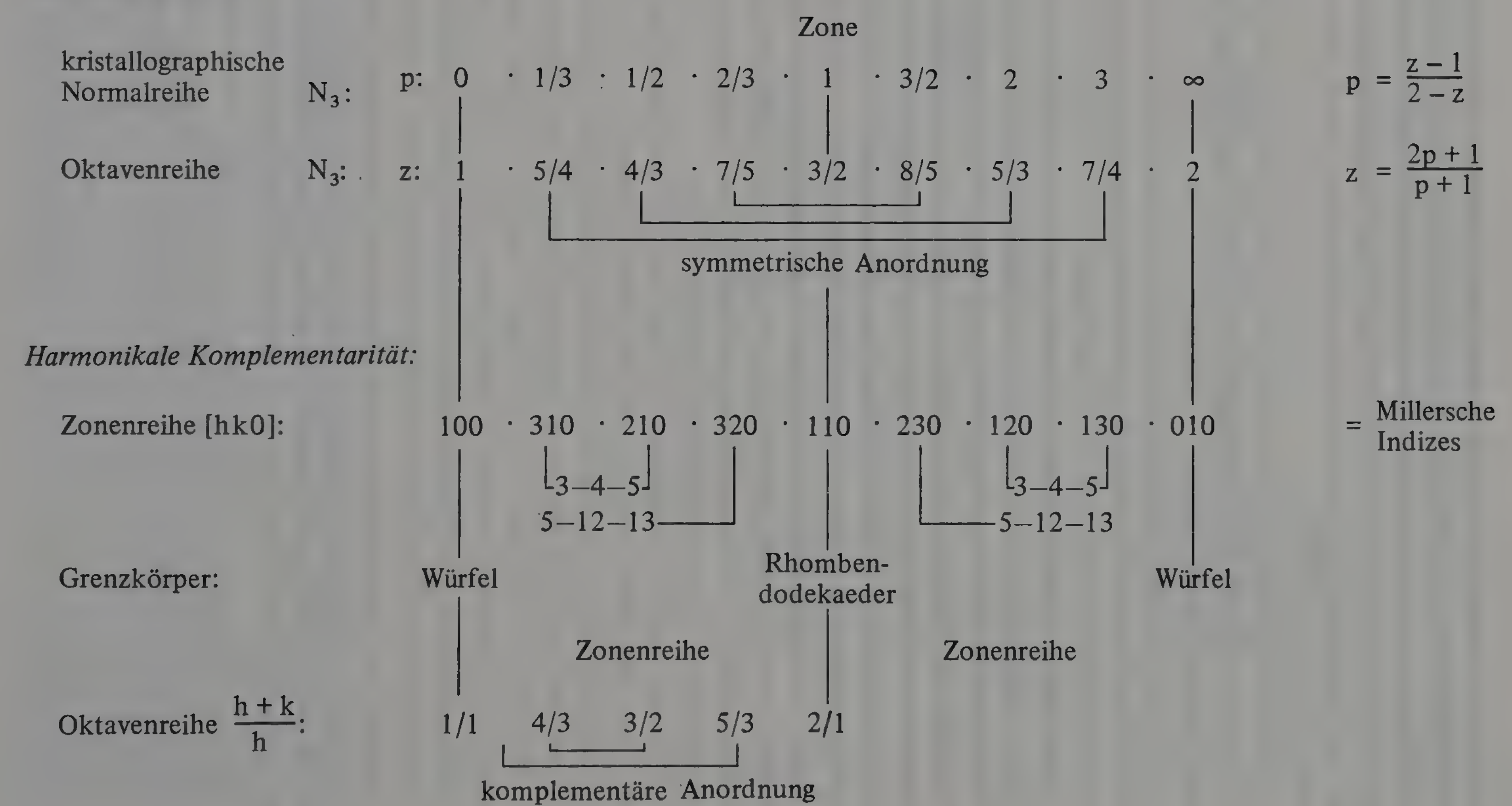
1) Es tritt erstmals der Gedanke auf, daß sich an einem Kristall zwischen zwei Endknoten eine Zone ausspannt, die zu der Vorstellung einer schwingenden Saite in einer *merkwürdigen Analogie*[2] steht.

2) Er prägte aus dieser Vorstellung heraus den Begriff der harmonischen Normal- und Oktavenreihe für die einzelnen Zonen[3].

3) Es ist seine Erkenntnis, daß im Gesamtsystem der Kristalle alle Zonen sich einheitlich auf das Grundschema einer einzigen sich immer weiter differenzierenden Normal- bzw. Oktavenreihe zurückführen lassen und damit innerhalb eines begrenzten harmonischen Raumes eingebunden sind[4].

Das auf Seite 130 gegebene Grundschema soll den prinzipiellen Unterschied zwischen der Komplikation in der Normal- und Oktavenreihe N_3 einer Zone bei Goldschmidt und der Komplementarität innerhalb einer Zonen- und Oktavenreihe, die in der stereometrischen und harmonikalen Transformierung der pythagoreischen Zahlen begründet ist, veranschaulichen.

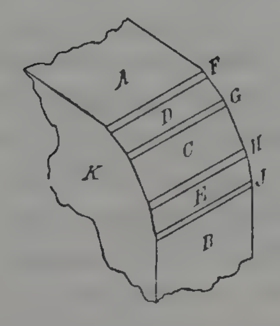
1) Dem Anhang (229) ist deshalb das Kapitel „Entwicklung der Krystallformen“ aus Goldschmidts Buch „Ueber Harmonie und Complication“ beigegeben.
2) V. Goldschmidt, Ueber Entwickelung der Krystallformen, in: Zeitschrift für Krystallographie 28, 1897, 4.
3) Ders., Über Complikation und Displikation, Heidelberg 1921, 65.
4) Siehe Goldschmidts Tabelle im Anhang (228). Diese Zusammenstellung von 20 verschiedenen Mineralien aus allen Kristallklassen stellt darüber hinaus einen wertvollen Beitrag dar, um einen Überblick über die in den Indizes auftretenden rationalen Zahlen zu bekommen. Diese Untersuchung, die nicht wie im vorliegenden Fall auf eine einzige Kristallklasse beschränkt ist, gibt über die Rationalität der Zahlen und ihre harmonikale Umwandlung einen konkreten Hinweis auf die in den Kristallformen der verschiedensten Mineralien vorherrschende *Naturstimmung.*



Harmonie und Komplikation
bei Goldschmidt:
Zone
kristallographische Normalreihe N3: p: 0 · 1/3 · 1/2 · 2/3 · 1 · 3/2 · 2 · 3 · ∞
Oktavenreihe N3: z: 1 · 5/4 · 4/3 · 7/5 · 3/2 · 8/5 · 5/3 · 7/4 · 2
symmetrische Anordnung
p = (z − 1)/(2 − z)
z = (2p + 1)/(p + 1)
Harmonikale Komplementarität:
Zonenreihe [hk0]: 100 · 310 · 210 · 320 · 110 · 230 · 120 · 130 · 010
= Millersche Indizes
3–4–5
5–12–13
3–4–5
5–12–13
Grenzkörper: Würfel
Rhomben-
dodekaeder
Würfel
Zonenreihe
Zonenreihe
Oktavenreihe (h + k)/h: 1/1 4/3 3/2 5/3 2/1
komplementäre Anordnung

Die Kristallindizes sind hier sowohl in der Form, wie Goldschmidt sie verwendet, als auch in der Millerschen Schreibweise angegeben und sind dadurch leicht zu vergleichen.

Die Zone Goldschmidts wird hier von den Flächen des Würfels als den eigentlichen Endpunkten begrenzt und setzt sich symmetrisch aus zwei gleichen Zonenreihen zusammen. Das Rhombendodekaeder bildet somit die Mitte dieser Zone, was durch den Kristallindex 1 in der Normalreihe und harmonikal durch das Verhältnis 3/2 als Dominante in der Oktavenreihe zum Ausdruck kommt[1].



N_0 = A . . . . B
N_1 = A . . . C . . . B
N_2 = A . D . C . E . B
N_3 = A F D G C H E I B

Primärflächen:	A	.	.	.	.	.	.	.	B	
N_0 =	0	.	.	.	.	.	.	.	∞	= Normalreihe 0.
1. Complication:	A	.	.	.	C	.	.	.	B	
N_1 =	0	.	.	.	1	.	.	.	∞	= Normalreihe 1.
2. Complication:	A	.	D	.	C	.	E	.	B	
N_2 =	0	.	$\frac{1}{2}$	.	1	.	2	.	∞	= Normalreihe 2.
3. Complication:	A	F	D	G	C	H	E	I	B	
N_3 =	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞	= Normalreihe 3.

u. s. w.

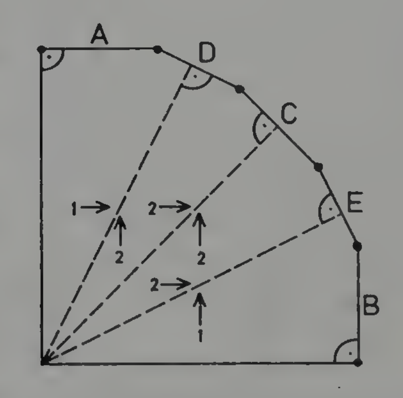
Sämtliche Flächen bilden über das Lot eine Senkrechte zum Mittelpunkt innerhalb der Achsenebene.

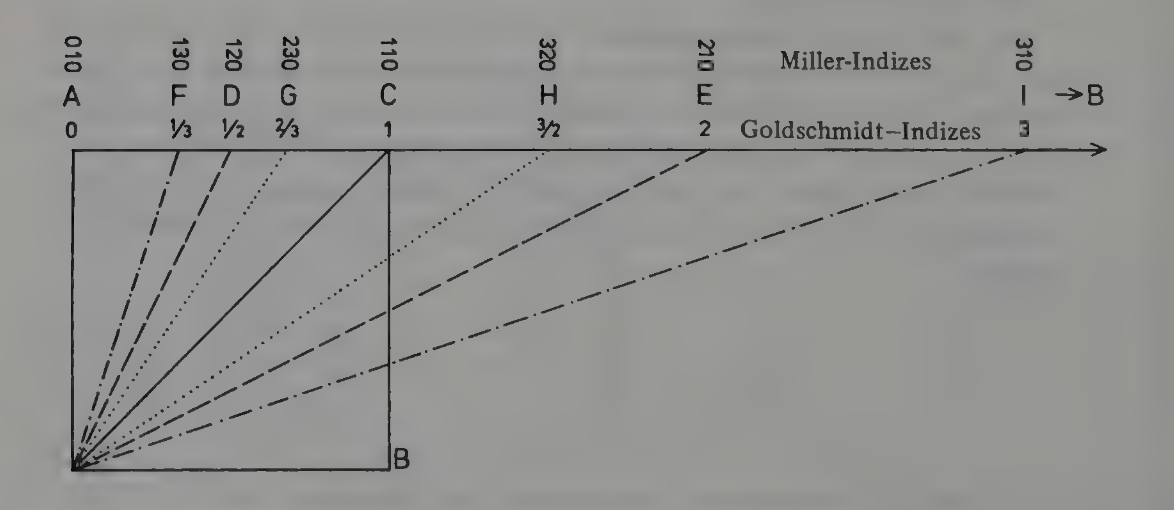
Der zahlenmäßige Zusammenhang zwischen den Kristallindizes und den Flächen ist in einem solchermaßen vereinfachten Koordinatenschema leicht zu erkennen. Die beiden Flächen D (120) und E (210) stehen in einer symmetrischen Beziehung zu der Fläche C und sind damit spiegelbildsymmetrisch. Dies gilt auch für die Flächen F und I und G und H. In diesem symmetrischen Aufbau gleichartiger Flächen ist das harmonische Grundprinzip bei Goldschmidt begründet.

1) Abbildung aus V. Goldschmidt, Ueber Harmonie und Complication, Berlin 1901, 4 und 6.

Flächen	Indizes		Körper
	Goldschmidt	Miller	
A	0	010	Würfel
F	1/3	130	
D	1/2	120	hk0
G	2/3	230	
C	1	110	Rhombendodekaeder
H	3/2	320	
E	2	210	hk0
I	3	310	
B	∞	100	Würfel

[hk0] als Pentagondodekaeder oder Pyramidenwürfel





Gegenüber den harmonischen Vorstellungen Goldschmidts liegt der Grundgedanke der harmonikalen Komplementarität nicht nur im konkreten Nachweis der pythagoreischen Zahlentripel in den Begrenzungswinkeln zweier Komplementärkörper, sondern insbesondere in der Möglichkeit, diese zur mathematischen Durchdringung so verschiedener Elemente wie

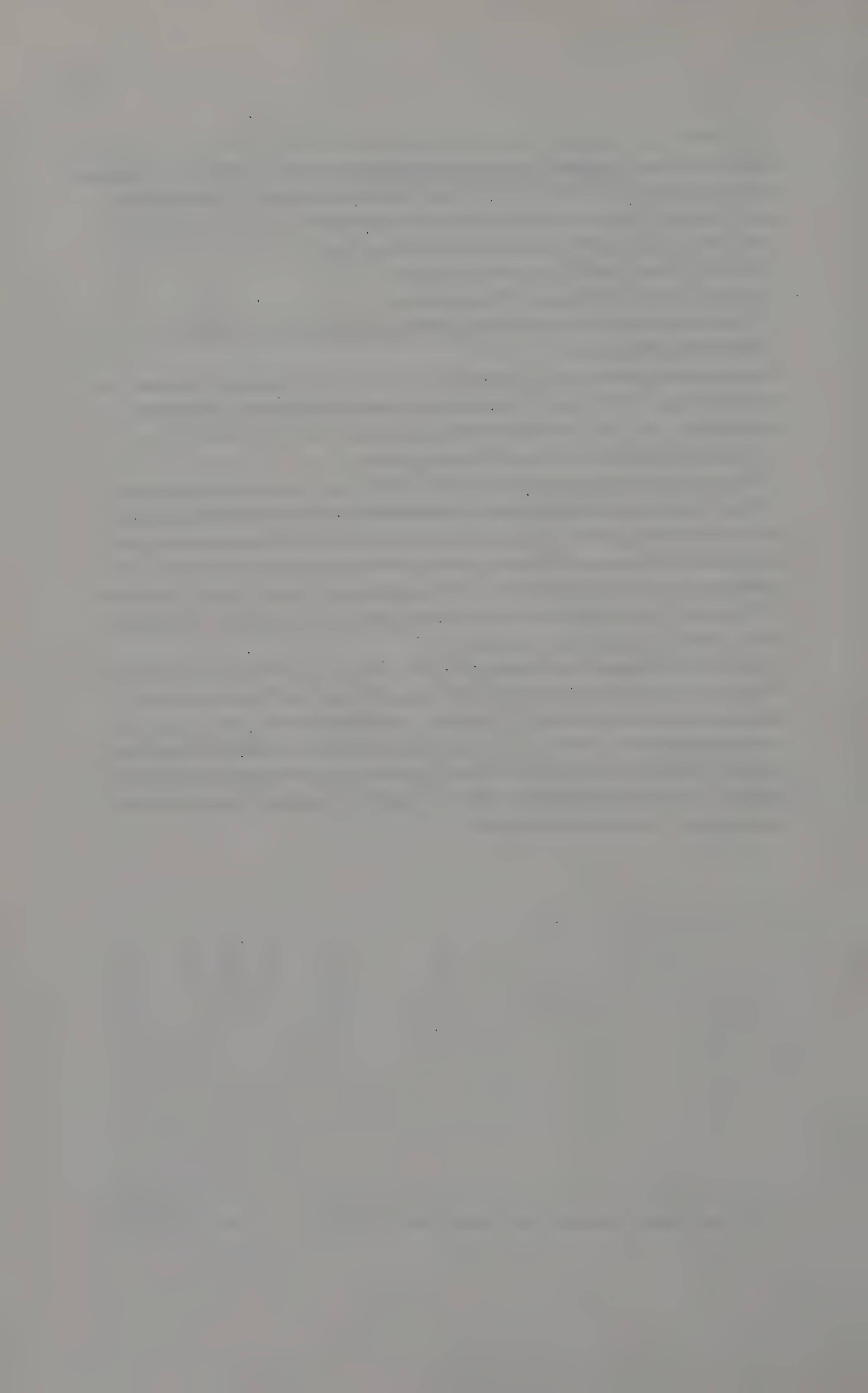
– Grund-, Grenz- und Kombinationskörper,
– Kristallindizes, Zahlenpaare, Zonenreihen,
– Kreuzungspunkt ⤩ zweier sich gegenseitig durchkreuzender Reihen,
– räumlicher Pythagoras

heranzuziehen und auf den harmonikal-strukturierten Raum zu übertragen. Es wird damit auf einen Raum – den Oktavenraum oder allgemein *Tonraum* – hingewiesen, der, wie Hans Kayser ausführte[1], im naturwissenschaftlichen Bereich bisher kaum in Erwägung gezogen wurde.

Wenn es auch noch nicht möglich war, alle Körper des kubischen Kristallsystems vollständig harmonikal zu interpretieren, so wurde das Prinzip doch zumindest für die einfach strukturierten Körper ausführlich vorgestellt. Erst eine endgültige harmonikale Beschreibung aller möglichen Kristallkörper, Kristallklassen und Zonenreihen wird die Möglichkeit eröffnen, diesen harmonikalen Raum und seine Intervalle (= Zwischenräume) in seiner ganzen Vielgestaltigkeit und Komplexität zu erfassen.

Im folgenden Kapitel soll gezeigt werden, daß sich die Idee eines harmonikalstrukturierten und begrenzten Raumes keinesfalls auf die Kristallkörper beschränken läßt, sondern auch auf einen so abstrakten Bereich wie den eines Atoms angewendet werden kann. Auch hier sind es die pythagoreischen Zahlentripel, die nun den Schlüssel für eine harmonikale Interpretation der Spektrallinien des Wasserstoffatoms bilden und damit ein weiteres Beispiel für eine harmonikale Stereometrie darstellen.

1) H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 173.



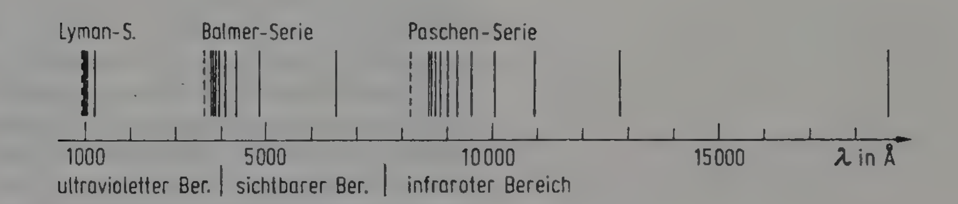
DIE HARMONIKALEN GRUNDLAGEN IN DEN SPEKTRALLINIEN DES WASSERSTOFFATOMS

Seit der Entdeckung der Spektralanalyse konnte kein Kundiger zweifeln, daß das Problem des Atoms gelöst sein würde, wenn man gelernt hätte, die Sprache der Spektren zu verstehen. Das ungeheure Material, welches sechzig Jahre spektroskopischer Praxis aufgehäuft haben, schien allerdings in seiner Mannigfaltigkeit zunächst unentwirrbar. Fast mehr haben die sieben Jahre Röntgenspektroskopie zur Klärung beigetragen, indem hier das Problem des Atoms an seiner Wurzel erfaßt und das Innere des Atoms beleuchtet wird. Was wir heutzutage aus der Sprache der Spektren heraus hören, ist eine wirkliche Sphärenmusik des Atoms, ein Zusammenklingen ganzzahliger Verhältnisse, eine bei aller Mannigfaltigkeit zunehmende Ordnung und Harmonie. Für alle Zeiten wird die Theorie der Spektrallinien den Namen Bohrs tragen. Aber noch ein anderer Name wird dauernd mit ihr verknüpft sein, der Name Plancks. Alle ganzzahligen Gesetze der Spektrallinien und der Atomistik fließen letzten Endes aus der Quantentheorie. Sie ist das geheimnisvolle Organon, auf dem die Natur die Spektralmusik spielt und nach dessen Rhythmus sie den Bau der Atome und der Kerne regelt (A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Vorwort 1911).

Es ist seit der Entdeckung der Spektrallinien des Wasserstoffs und anderer chemischer Elemente immer wieder versucht worden, über die gemessenen Wellenlängen gesetzmäßige harmonische Beziehungen herzustellen, wie sie analog aus dem musikalisch-akustischen Bereich in Form der Intervalle, Obertöne, Kombinationstöne usw. bekannt waren. Die vollkommen exakte Anordnung der Spektrallinien innerhalb einer Reihe legte schon früh den Gedanken eines harmonischen Ordnungsprinzips nahe. Da jedoch die einzelnen Versuche nicht zu einer befriedigenden Lösung führten, die über das bekannte, rein mathematische Prinzip hinausging, setzte sich die Meinung durch, daß irgendwelche har-

monischen Gesetzmäßigkeiten eben nicht vorhanden sind[1]. *Heute ist, abgesehen von der Interessenverschiebung der Atomtheorie nach der wellenmechanischen und quantentheoretischen Seite hin, die allgemeine Meinung ungefähr die, daß das Zahlenproblem der optischen Spektren durch spezielle und allgemeine Dachformeln geklärt und damit auch das Interesse an einer Deutung mittels akustischer Daten nicht mehr aktuell sei.*[2]

Eine harmonikale Lösung ist jedoch nach wie vor von großer Bedeutung, da sie zum Harmonieverständnis der ganzen Zahlen wesentlich beiträgt. Bis zur Entdeckung des mathematischen Ordnungsprinzips in den Spektrallinien durch J. J. BALMER (1825-1898) war es auch durchaus üblich, diese als *harmonische Serien, Oberschwingungen, Obertöne* u. ä. zu bezeichnen[3].



Schema der drei kürzestwelligen Spektralserien des H-Atoms (– – – Seriengrenze)[4]

STONEY[5] wies zuerst darauf hin, daß die Schwingungszahlen der drei Wasserstofflinien H_α, H_β und H_δ sich zueinander verhalten wie 20:27:32. Die Schwingungszahlen dieser drei Spektrallinien (H_γ blieb zunächst unberücksichtigt) sind jedoch schon in den Anfangsgliedern sehr hoch und werden bei den nachfolgenden Spektrallinien zahlenmäßig noch wesentlich größer, so daß eine Ana-

1) H. Konen, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, Braunschweig 1913, 65f; A. Hagenbach, Fünfundsiebzig Jahre Spektralanalyse, in: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 116, 1935, 198-218; M. Jammer, The conceptual development of quantum mechanics, New York 1966.
2) Hans Kayser, Das akustische Atommodell, in: Abhandlungen zur Ektypik harmonikaler Wertformen, Zürich 1938, 116. 165ff.
3) Heinrich Kayser, Handbuch der Physik, Band 6: Optik, Leipzig 1906, 717f; H. W. Vogel, Praktische Spektralanalyse, Nördlingen 1877, 195f.
4) Abbildung nach R. Seiwert, Die Elektronenhülle des Atoms, in: Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 4, Teil 1, Aufbau der Materie, Berlin 1975, 16.
5) J. Stoney, On the Cause of the Interrupted Spectra of Gases, in: Philosophical Magazine 41, London 1871, 291-296.

logie zum musikalisch-akustischen Bereich im klassischen Sinne nicht mehr in Betracht kam. Auf diesen Umstand machte schon J. J. BALMER[1] aufmerksam, als er erstmals in seinem Vortrag am 25. 6. 1884 vor der Naturforschenden Gesellschaft in Basel die mathematische Lösung für die Spektrallinien aufzeigte, die in der folgenden Formel bestand:

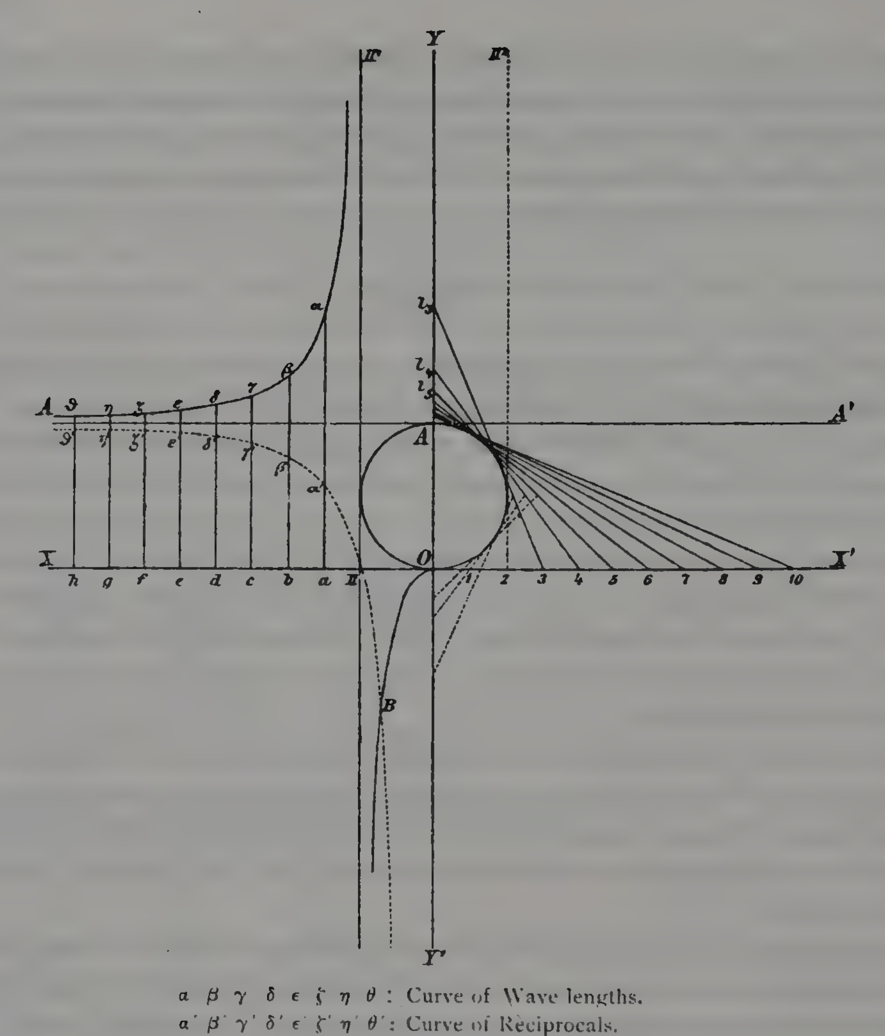
$$\lambda = C \cdot \left(\frac{m^2}{m^2 - n^2}\right)$$

Es bedeuteten λ die Wellenlänge in Ångström ($1\,\text{Å} = 10^{-10}$ m), C die Seriengrenze des Linienspektrums (= 3646 Å) und m und n die Reihe der ganzen Zahlen, die den Abstand zwischen den einzelnen Spektrallinien bestimmten. Es waren zunächst nur die Spektrallinien bekannt, die im sichtbaren Teil des Spektrums lagen, wobei sich $n = 2$ und $m > 2$ ergab. Damit konnte Balmer die damals bekannten 14 Spektrallinien mathematisch erfassen und auf die Seriengrenze hinweisen. Dies bedeutete einen wesentlichen Fortschritt in der strukturellen Aufklärung der Spektrallinien, wenn es Balmer auch nicht gelang, seine Formel – geometrisch und harmonikal – im Sinne einer weitergehenden Interpretation aufzuschlüsseln.

Dabei muß man in Betracht ziehen, daß gerade Balmer sich für Fragen der Harmonie in der Wissenschaft, vor allem aber in der Kunst interessierte und sich auch nachhaltig auf diesen Gebieten einsetzte. Zudem befaßte er sich mit geometrischen Problemen und erarbeitete in dieser Zeit ein Buch über Projektive Geometrie[2].

Balmer schreibt am Schluß seiner ersten Publikation: *Vielleicht findet sich in einer anderen graphischen Construction der Spektrallinien das Mittel, auf dem Wege solcher Untersuchungen weiter zu kommen*[3]. Jedoch erst zwölf Jahre später veröffentlichte er eine verblüffend einfache geometrische Lösung seiner mathematischen Formel:

1) J. J. Balmer, Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs, in: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel 7, 1885, 548-560. 750-752.
2) A. Hagenbach, J. J. Balmer und W. Ritz, in: Naturwissenschaften 9, 1921, 451-455; H. Balmer, J. J. Balmer, in: Elemente der Mathematik 16, 1961, 49-60.
3) J. J. Balmer, 1885, 560.



α β γ δ ε ζ η θ : Curve of Wave lengths.
α' β' γ' δ' ε' ζ' η' θ': Curve of Reciprocals.

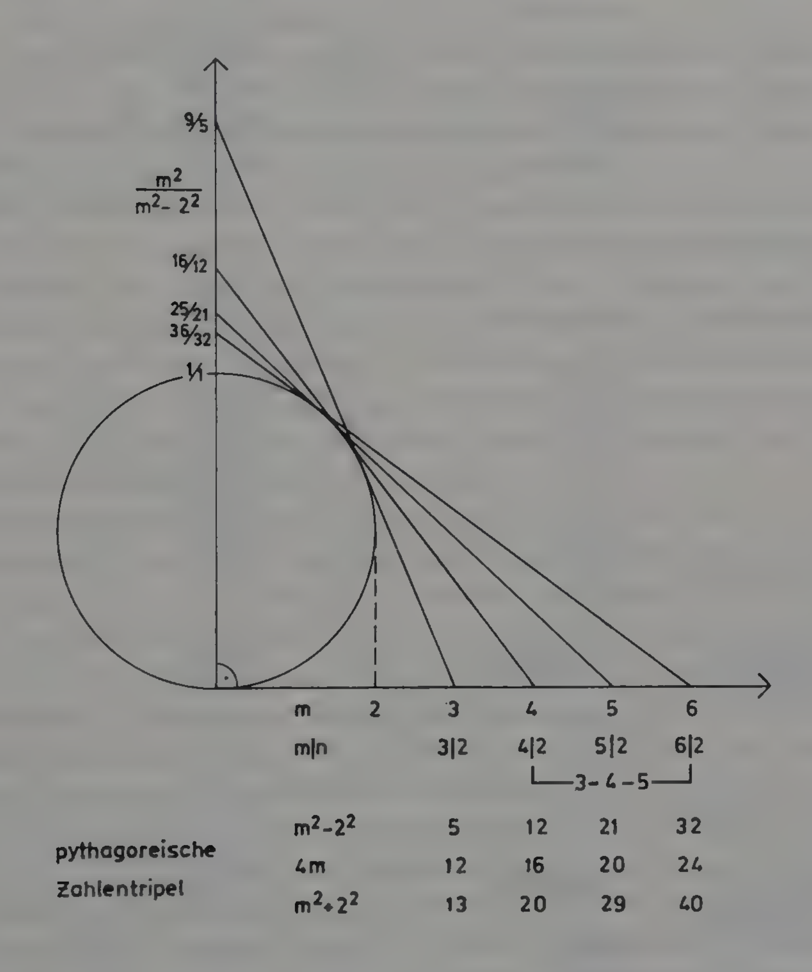
Balmers geometrische Konstruktion des Linienspektrums

Balmer vermerkt in dieser letzten Veröffentlichung kurz vor seinem Tod abschließend: *Vielleicht ist diese Construktion geeignet, in die rätselhaften Erscheinungen der Spektrallinien ein neues Licht zu bringen und auf den richtigen Weg zu führen, die wahre geschlossene Formel für die Spektralwellen zu finden . . .*"[1]

In diesen beiden Zitaten gibt Balmer deutlich zu erkennen, daß ihn die Interpretation seiner eigenen Formel keineswegs voll befriedigt, und stellt selbst eine geometrische Lösung vor. Diese Konstruktion zeigt ein hohes Maß an Originalität und an geometrischem Können und führt auch zum besseren Verständnis des mathematischen Ausdrucks $\frac{m^2}{m^2 - n^2}$

1) J. J. Balmer, Eine neue Formel für Spektralwellen, in: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel 11, 1897, 448-460, Tafel VI; ders., in: The Astrophysical Journal 5, 1897, 199-209, Tafel VIII.

Es ist an dieser Stelle nicht beabsichtigt, eine vollständige Analyse der Balmerschen Konstruktion vorzunehmen; dies sei einer späteren Publikation vorbehalten. Doch soll hier wenigstens ein Punkt bzw. Ausschnitt seiner Konstruktion herausgestellt werden, der für die vorliegende Thematik von besonderem Interesse ist. Es ist dies die Möglichkeit, die pythagoreischen Zahlentripel nicht nur geometrisch zu konstruieren, sondern sie auch direkt mit der Balmerschen Formel in Verbindung zu bringen. Das Erstaunliche daran ist, daß dieser Zusammenhang weder von Balmer selbst, noch später in der Mathematik oder in der Physik erkannt wurde. Dabei ist diese Lösung von einer besonderen Einfachheit und Klarheit und hätte durchaus als Beispiel für den Nachweis der pythagoreischen Zahlentripel auch für diesen physikalischen bzw. atomaren Bereich herangezogen werden können.



Mit dem Nachweis der pythagoreischen Zahlen in der Balmerschen Konstruktion ist jedoch noch keine harmonikale Analyse gegeben. Bevor eine solche möglich ist, muß zunächst das Zahlenmaterial (140) vorgestellt werden, das in den einzelnen Serienspektren des Wasserstoffatoms vorliegt. Dabei ist

Lyman-Serie: Th. Lyman, 1906	Wellenlänge in Å	m	$\frac{m^2}{m^2 - 1^2}$	
	1215.6	2	4/3	
	1025.7	3	9/8	
	972.5	4	16/15	bis m = 10
	949.7	5	25/24	bekannt
Seriengrenze:	911.7	∞	1/1	

Balmer-Serie: J. J. Balmer, 1885	Wellenlänge	m	$\frac{m^2}{m^2 - 2^2}$	
	6562.8	3	9/5	
	4861.3	4	16/12 – 4/3	
	4340.5	5	25/21	
	4101.7	6	36/32 – 9/8	
	3970.1	7	49/45	
	3889.1	8	64/60 – 16/15	
	3835.4	9	81/77	bis m = 37
	3797.9	10	100/96 – 25/24	bekannt
Seriengrenze:	3646	∞	1/1	

Paschen-Serie: F. Paschen, 1908	Wellenlänge	m	$\frac{m^2}{m^2 - 3^2}$
	18751	4	16/7
	12818	5	25/16
	10938	6	36/27 – 4/3
	10050	7	49/40
	9546	8	64/55
Seriengrenze:	8204	∞	1/1

Brackett-Serie: F. S. Brackett, 1922	Wellenlänge	m	$\frac{m^2}{m^2 - 4^2}$
	40512	5	25/9
	26251	6	36/20 – 9/5
Seriengrenze:	14584	∞	1/1

Pfund-Serie: A. H. Pfund, 1924	Wellenlänge	m	$\frac{m^2}{m^2 - 5^2}$
	74000	6	36/11
Seriengrenze:	22788	∞	1/1

[$1 Å = 10^{-10}$ m]

es zweckmäßig, nicht nur eine einzige Serie zu analysieren, sondern zu zeigen, daß in allen Serienspektren das gleiche harmonikale Grundschema vorliegt und daß diese auch untereinander verbunden sind. Es soll damit der allgemein vorherrschenden Meinung widersprochen werden, daß *das wirkliche Spektrum sich klassisch jedenfalls auf keine Weise deuten läßt*[1].

Die Schwierigkeit der Interpretation beginnt schon mit der Balmerschen Formel, da die sich ergebenden Verhältniszahlen, bezogen auf die Seriengrenzen, keinesfalls Schwingungszahlen oder Intervallen zugeordnet werden dürfen, wie dies häufig gemacht wird. Der mathematische Ausdruck

$$\lambda = C \cdot \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

führt zu einem Verhältnis von quadratischen Größen und steht damit im Gegensatz zu den linearen Größen, wie sie im akustischen Bereich anfallen. Es ist also zunächst einmal nötig, die quadratischen Zahlenqualitäten in lineare Größen zu transformieren, um sie harmonikal vergleichen zu können. Damit stößt man auf ein weiteres Kriterium, das für die Frage nach der Harmonie von entscheidender Bedeutung ist. Die Harmonie ist zwar mit den einfachen ganzen Zahlen verbunden, doch Rationalität allein genügt keinesfalls, um die Harmonie zu erkennen; am Beispiel der Kristallindizes wurde dies schon ausführlich dargestellt. Es stellt sich vor allem die Frage nach dem übergeordneten Prinzip. Dieses besteht sowohl im Nachweis der pythagoreischen Zahlen als auch in ihrer Beziehung zu den Zahlenpaaren und Intervallen. Es kann demnach erst dann von harmonikalen Verhältnissen gesprochen werden, wenn sie mit den im klassischen Sinne verwendeten Begriffen identisch sind.

Die Rationalität der Zahlen ist keineswegs auf die Kristalle oder Spektrallinien beschränkt, sondern ist ein in der Naturwissenschaft häufig anzutreffendes Phänomen, wie z. B. im Periodensystem der chemischen Elemente, in den Formeln chemischer Verbindungen oder in der Quantenphysik. Doch erst die Verbindung der rationalen Zahlen mit den pythagoreischen Zahlentripeln gibt die Möglichkeit zu ihrer harmonikalen Interpretation und zur Übertragung auf das rechtwinklige Achsenkreuz eines oktavbegrenzten Raumes. Darin liegt die besondere Bedeutung der pythagoreischen Zahlen.

Wir wissen aus zahlreichen Erfahrungen, daß in der atomistischen Welt neue fremdartige Gesetze herrschen, in denen eine uns noch unvollkommen verständliche Harmonie ganzer Zahlen zum Ausdruck kommt, die sogenannte Quantentheorie von Planck[2]. Dieser *noch unvollkommen verständlichen Harmonie ganzer Zahlen,* wie sie in den Spektrallinien des Wasserstoffatoms den mathemati-

1) W. Schallreuther, Einführung in die Physik, 3. Band: Optik und Atomphysik, Leipzig 1956, 369.
2) M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin 1922³, 262.

schen Hintergrund bilden, soll im Verlauf dieses Kapitels ausführlicher nachgegangen werden.

Man geht heute allgemein davon aus, daß das Ordnungsprinzip der Spektrallinien einer Serie des Wasserstoffatoms – sowohl für das Gitter- als auch für das Prismenspektrum – mathematisch durch die folgende Formel ausreichend beschrieben ist:

$$\lambda = C \cdot \left(\frac{m^2}{m^2 - n^2}\right)$$ ältere Schreibweise (Balmer 1885)

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$ neuere Schreibweise (Rydberg 1890)

wobei Ry für die sogenannte Rydberg-Konstante (= 109677,7 cm^{-1}) steht. J. R. RYDBERG (1854-1919) fand heraus, daß die von Balmer gefundene Formel sich auch auf die Spektren einiger anderer Elemente übertragen läßt. In der älteren Schreibweise entspricht C = 3645,6 Å der Seriengrenze des Linienspektrums der Balmer-Serie und ist mathematisch mit dem Kehrwert der Rydberg-Konstante verbunden.

$$C = \frac{n^2}{Ry}$$

Für den Nachweis der harmonikalen Strukturelemente ist es ratsam, von der älteren Schreibweise der Balmerschen Formel auszugehen, da zur geometrischen Konstruktion die Wellenlängen λ geeigneter sind als ihr reziproker Wert $1/\lambda$ in der neueren Schreibweise Rydbergs. In dieser reziproken Darstellung liegt auch die Ursache, daß es kaum weitere geometrische Lösungsvorschläge[1] für die Balmersche Formel gibt.

Untersucht man harmonikal die den Wellenlängen entsprechenden Zahlenverhältnisse

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

der fünf Serienspektren genauer (140), so bekommt man ein Bild der teilweise recht hohen Zahlenwerte. In diesen Reihen, vor allem in der Lymanserie, sind einerseits einfache Zahlenverhältnisse wie 4/3, 9/8, 16/15, 25/24 vertreten, die auch harmonikal bekannt sind. Andererseits kommen Zahlenverhältnisse vor, die so hoch und kompliziert sind, daß sie für eine harmonikale Bewertung nicht

1) Vgl. dazu: L. Banet, Evolution of the Balmer Series, in: American Journal of Physics 34, 1966, 456-503; ders., Balmer's Manuscripts and the Construction of his Series, ebenda 38, 1970, 821-828; J. Mac Lean, On Harmonic Ratios in Spectra, in: Annals of Science 28, 1972, 121-137; A. Hermann, Lexikon Geschichte der Physik A-Z, Köln 1972, 24.

herangezogen werden können. Darüber hinaus ist der Zahlenwert in einigen Verhältnissen, z. B. in den Anfangsgliedern der Paschen-, Brackett- und Pfundserie, größer als zwei, und dadurch hat es zumindest den Anschein, als würde hier der Oktavenraum bzw. das Verhältnis der Oktave überschritten.

Um zu einer echten harmonikalen Lösung vorzudringen, müssen diese Zahlenverhältnisse in entsprechend einfachere Intervalle umgewandelt werden. Es ist hierzu lediglich notwendig, den mathematischen Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

aufzuschlüsseln:

1) Das strukturelle Bindeglied $m^2 - n^2$ ist ein Teil der Formel zur Bildung der pythagoreischen Zahlentripel:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

Der allgemeine Nachweis pythagoreischer Zahlen ist schon in der Balmerschen Konstruktion enthalten.

2) Der mathematische Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

läßt sich nach der binomischen Formel in zwei Teile zerlegen:

$$\frac{m}{m + n} \quad \text{und} \quad \frac{m}{m - n}$$

auf die sich die harmonische Teilung oder harmonische Proportion und die beiden Formeln der harmonischen und arithmetischen Mittelbildung gleichermaßen anwenden lassen.

3) Jede Spektrallinie stellt mathematisch das arithmetische Mittel der harmonischen Teilung oder das Produkt der inneren und äußeren Teilung dar und steht geometrisch sowohl im Mittelpunkt des Apollonischen Kreises als auch optisch im Brennpunkt von vier harmonischen Punkten.

Die hier vorgeschlagene Lösung des Problems liegt deshalb nicht nur im Nachweis pythagoreischer Zahlen, sondern das Kernstück wird gebildet durch die *harmonische Teilung* oder *harmonische Proportion,* da sich in ihr alle bisher behandelten harmonikalen Strukturelemente wiederfinden und sich auf einfache Weise geometrisch darstellen sowie stereometrisch und harmonikal interpretieren lassen.

Damit wird deutlich, daß auch die einzelnen Serienspektren des Wasserstoffatoms als Ausdruck eines räumlich-harmonikalen Strukturphänomens angesehen werden müssen.

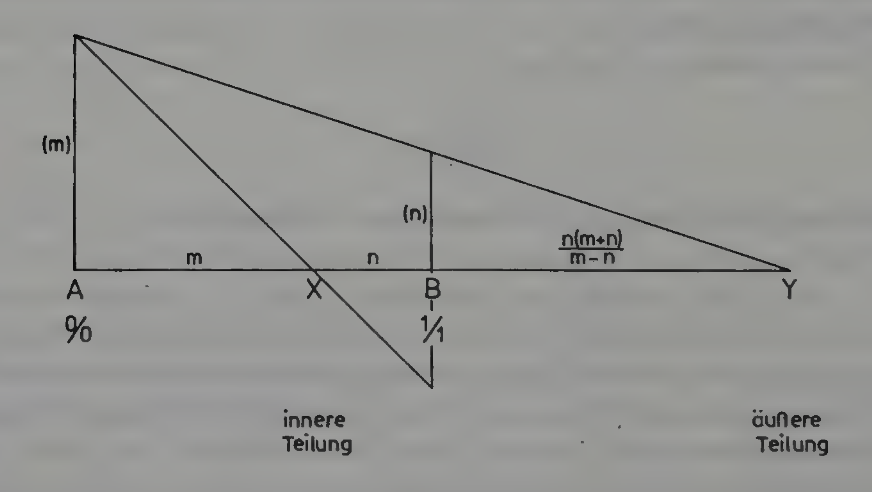
Harmonische Teilung oder Harmonische Proportion

Die harmonische Teilung stellt geometrisch die rationale Teilung einer Strecke AB durch einen inneren Teilungspunkt X und einen äußeren Teilungspunkt Y dar. Diese vier Punkte A, B und X, Y auf einer Geraden heißen harmonische Punkte. Die Strecke AB ist durch die Punkte X und Y harmonisch geteilt, wenn die Proportion

$$AX : XB = YA : YB$$

oder wenn das Doppelverhältnis der beiden zugeordneten Punkte A, B und X, Y gleich –1 ist. Dementsprechend wird umgekehrt auch die Strecke XY durch die Punkte A und B harmonisch geteilt.

$$\frac{AX}{XB} : \frac{YA}{YB} = -1$$ Harmonisches Doppelverhältnis



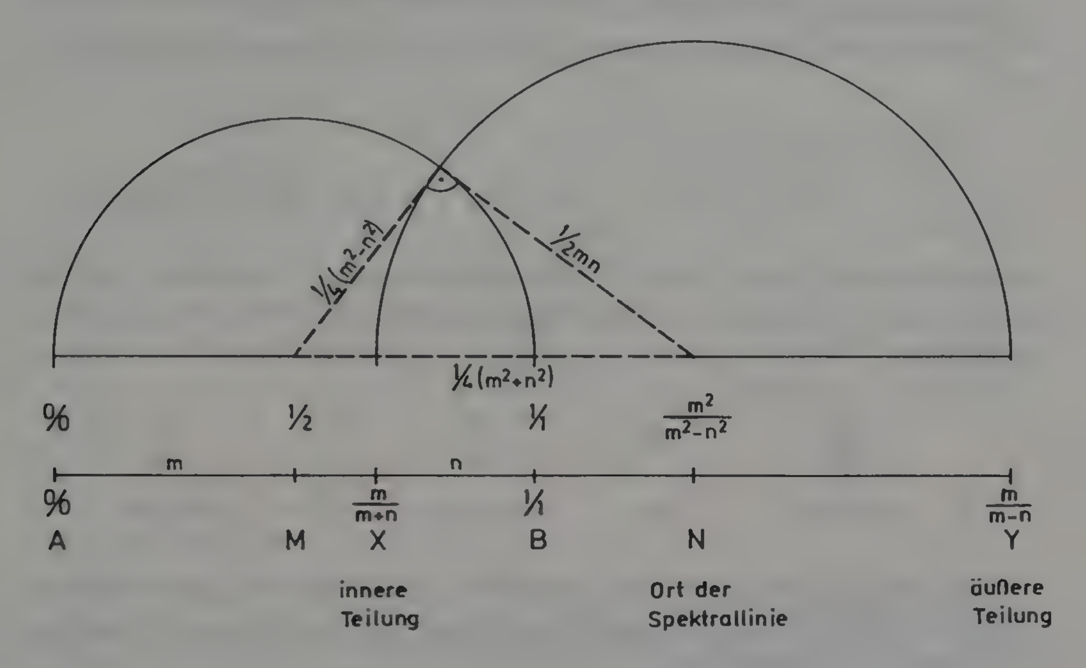
$$\frac{AX}{XB} = \frac{YA}{YB} = \frac{m}{n}$$

Über die harmonische Teilung lassen sich die rationalen Zahlen m und n direkt in komplementäre Intervalle umwandeln, ohne daß die pythagoreischen Dreiecke zunächst in Erscheinung treten.

$$\frac{AX}{AB} \otimes \frac{YB}{YX} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Intervall}_1 \otimes \text{Intervall}_2 = \text{Oktave}$$

Die Verbindung von pythagoreischen Dreiecken und den vier harmonischen Punkten läßt sich dadurch herstellen, daß jeweils über den beiden zugeordneten Punkten A, B und X, Y ein Kreis gezogen wird. Die Mittelpunkte M und N der beiden Kreise sowie der Schnittpunkt O bilden das den rationalen Zahlen m und n entsprechende pythagoreische Dreieck.



In dieser Abbildung sind alle Strukturelemente enthalten, die zur geometrischen und harmonikalen Analyse erforderlich sind: Zahlenpaare, pythagoreische Zahlentripel und harmonische Teilung.

Der mathematische Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

läßt sich so arithmetisch über die binomische Formel und geometrisch über die harmonische Teilung zerlegen, doch gibt dieser mathematische Vorgang nur unvollständig seine eigentliche Bedeutung wieder.

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2} = \frac{m}{m+n} \otimes \frac{m}{m-n}$$

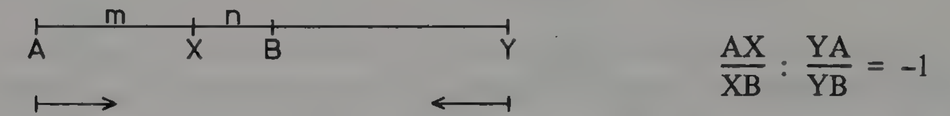
	innere Teilung	äußere Teilung
	Intervall$_1$	Zahlenverhältnis

Dies kommt schon dadurch zum Vorschein, daß den beiden Teilungsverhältnissen inhaltlich eine vollkommen verschiedene Bedeutung innewohnt. Nur der

Zahlenwert der inneren Teilung

$$\frac{m}{m+n}$$

kann einem Intervall zugeordnet und damit auch in den Oktavenraum eingeordnet werden. Die unterschiedliche Bewertung hat ihren Ursprung darin, daß bei der harmonischen Teilung von zwei verschiedenen Richtungen ausgegangen wird.



$$\frac{AX}{XB} : \frac{YA}{YB} = -1$$

Beide Richtungen führen damit auch zu komplementären Intervallen, wodurch die Thematik von Harmonie und Komplementarität eine besondere Akzentuierung erfährt.

$$\frac{AX}{AB} \otimes \frac{YB}{YX} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Intervall}_1 \otimes \text{Intervall}_2 = \text{Oktave}$$

Die komplementären Intervalle entsprechen zwar beide dem gleichen pythagoreischen Zahlendreieck, doch nur das erste Intervall ist direkt der Einheitsstrecke AB = 1/1 zugeordnet.

Das pythagoreische Dreieck bildet damit in der harmonischen Teilung die Klammer, durch die die beiden Kreise verbunden sind und über die ganz konkret eine harmonikale Zuordnung von Intervallen vorgenommen werden kann:

Zahlenpaar: m und n

pythagoreische Zahlen: $[\tfrac{1}{2}(m^2 - n^2)]^2 + [mn]^2 = [\tfrac{1}{2}(m^2 + n^2)]^2$

Intervall_1: $\frac{m}{m+n}$

Intervall_2: $\frac{m+n}{2m}$

$$\text{Intervall}_1 \otimes \text{Intervall}_2 = \text{Oktave}$$

$$\frac{m}{m+n} \otimes \frac{m+n}{2m} = \frac{1}{2}$$

Der Ort der Spektrallinie wird bei der harmonischen Teilung durch die Strecke

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

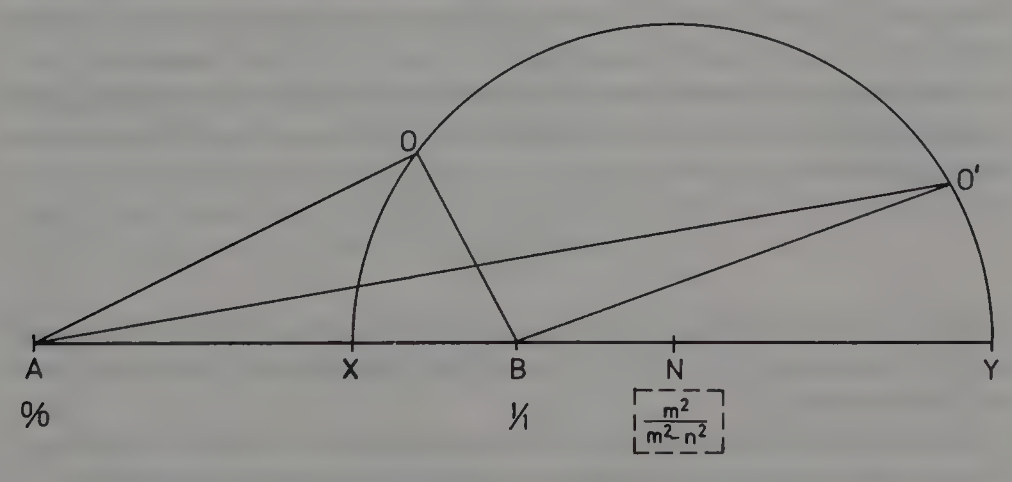
bestimmt. Die Strecke AN ist einerseits das arithmetische Mittel ($aM = \frac{a+b}{2}$) der inneren ($a = \frac{m}{m+n}$) und äußeren ($b = \frac{m}{m-n}$) Teilung und andererseits das harmonische Mittel ($hM = \frac{2ab}{a+b}$) der Strecken AB und AY.

arithmetisches Mittel aM: $$\frac{AX + AY}{2} = \frac{\frac{m}{m+n} + \frac{m}{m-n}}{2} = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

harmonisches Mittel hM: $$\frac{2 \cdot AB \cdot AY}{AB + AY} = \frac{2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{m}{m-n}}{\frac{1}{1} + \frac{m}{m-n}} = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

Apollonischer Kreis

Er wird definiert als geometrischer Ort aller derjenigen Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten ein konstantes Verhältnis haben[1]. Geometrisch läßt sich der Ort jeder Spektrallinie N über den Apollonischen Kreis am einfachsten demonstrieren, da hier schon die harmonische Teilung und die vier harmonischen Punkte vorgegeben sind.



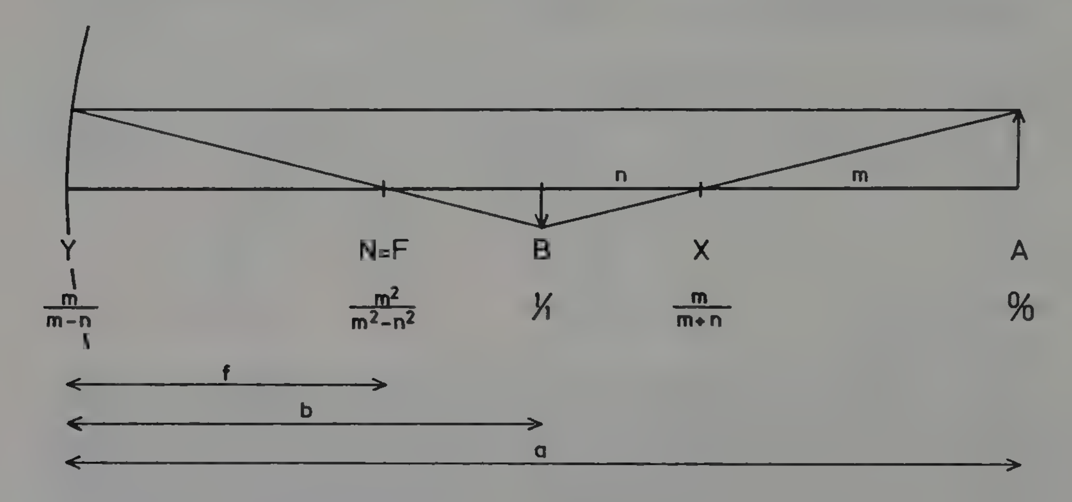
$$\frac{AX}{XB} = \frac{AO}{OB} = \frac{AO'}{O'B} = \frac{AY}{YB} = \frac{m}{n}$$

1) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 4. Band, Berlin 1940³, 224.

Harmonische Teilung in der Optik

Die harmonische Teilung und die vier harmonischen Punkte spielen auch in der Optik eine Rolle[1], und zwar bei der mathematischen Behandlung der sphärischen Linsen und Spiegel. Dies ist umso interessanter, als es sich bei den Spektrallinien ebenfalls um optische Phänomene handelt.

Es soll hier nur ein Teilaspekt herausgegriffen werden, der für das geometrische Verständnis der vier harmonischen Punkte und des fünften Punktes, zugleich Ort der Spektrallinie N und des Brennpunktes F eines optischen Systems, von Bedeutung ist.



Die Abbildung stellt einen Hohlspiegel dar mit dem Scheitelpunkt Y, dem Mittelpunkt X, der Strecke XY als Radius und als Bildpunkte A und B, entsprechend den harmonischen Punktepaaren X, Y und A, B. Der Brennpunkt F ist gleichzeitig Ort der Spektrallinie in der bisherigen Darstellung über die harmonische Teilung. Die in der Optik allgemein übliche Formel zur Bestimmung des Brennpunktes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

entspricht der Balmerschen Formel, indem lediglich vom Punkt Y aus gerechnet wird, da Brennpunkt und Ort der Spektrallinie bei gleichem Teilungsverhältnis m:n identisch sind.

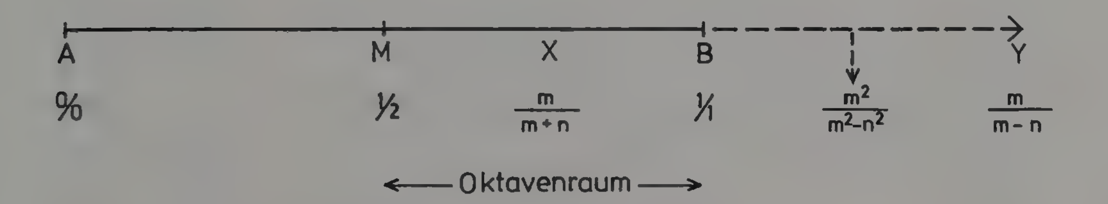
Eine weitergehende Interpretation der harmonischen Teilung und anderer harmonikaler Inhalte wird im Kapitel der Musikalischen Geometrie vorgenommen, da dort eine konkrete Zuordnung von Tönen und Intervallen über das Monochord möglich ist.

1) E. Jochmann, Grundriß der Experimentalphysik, Berlin 1881[7], 129f; W. Schallreuther, 33f.

Es läßt sich nun jede Spektrallinie einzeln und im Zusammenhang mit den anderen über die harmonische Teilung geometrisch exakt konstruieren. Entscheidend für ihre geometrische Darstellung ist das Teilungsverhältnis m : n, das den Ort der Spektrallinie entsprechend dem mathematischen Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

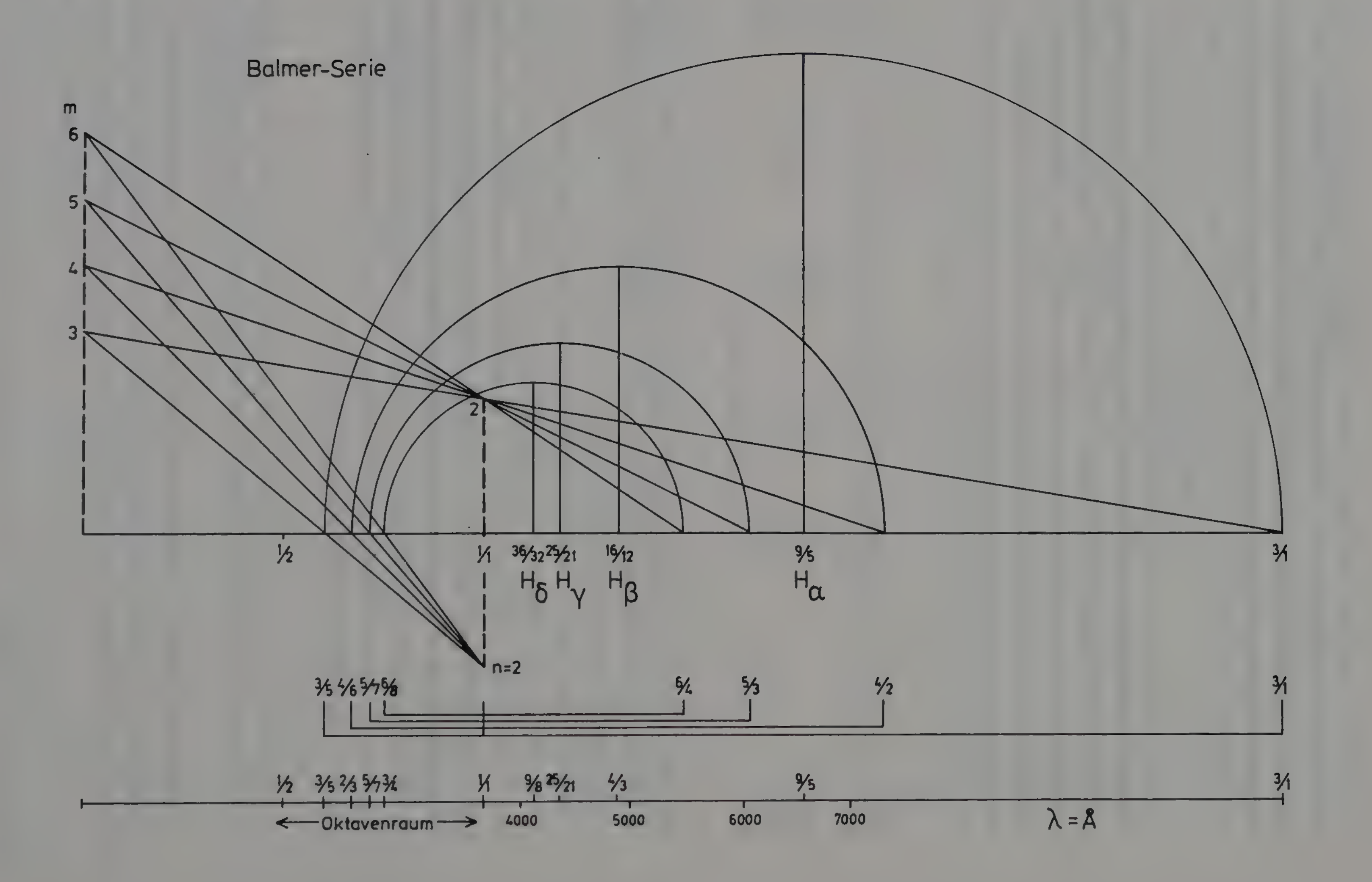
auf einer Wellenlängenskala festlegt. Die harmonikale Aufschlüsselung in innere und äußere Teilung macht es möglich, auch eine Zuordnung des entsprechenden Intervalls innerhalb des Oktavenraums vorzunehmen. Der Oktavenraum ist durch die beiden Grenzpunkte M und B auf der Einheitsstrecke AB entsprechend der harmonischen Teilung in seinen Grenzen festgelegt, wobei sich über die innere Teilung sämtliche Intervalle m/(m + n) einordnen lassen.

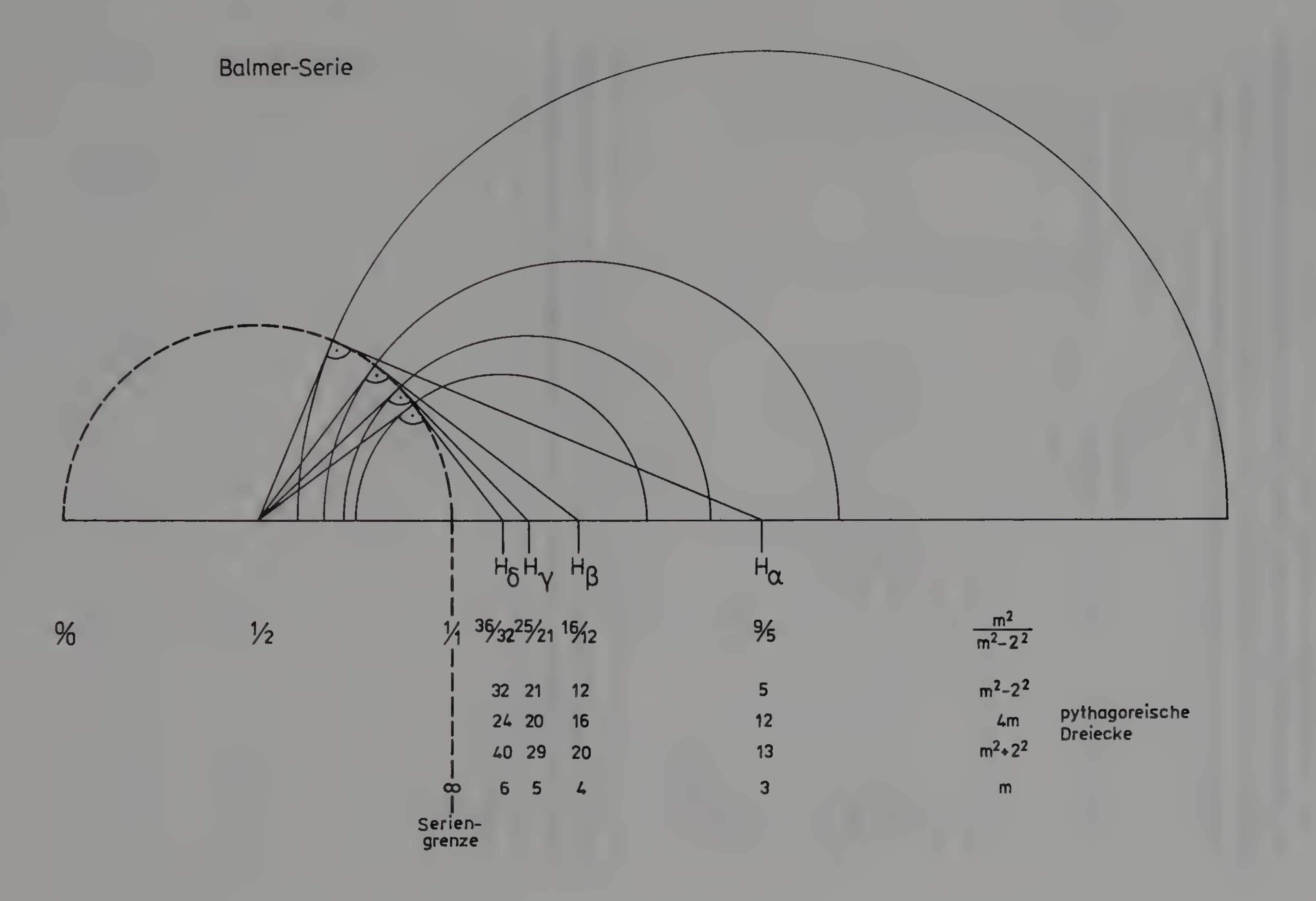


Die äußere Teilung führt zu Zahlenverhältnissen zwischen 1/1 und ∞, die keine Intervalle im ursprünglichen Sinne darstellen, jedoch zu diesen in einer korrelaten Beziehung stehen. Die Spektrallinien

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

nähern sich der Seriengrenze in dem Maße, wie sich die entsprechenden Intervalle dem äußeren Grenzwert 1/1 des Oktavenraums nähern. Umgekehrt entfernen sich die Spektrallinien von der jeweiligen Seriengrenze so, wie sich die zugehörigen Intervalle dem inneren Grenzwert 1/2 des Oktavenraums nähern (vgl. die Diagramme der Seiten 150 und 151).


Balmer-Serie
m
6
5
4
3
2
½
1/1
36/32 25/21
16/12
9/5
3/1
H_δ H_γ H_β H_α
n=2
3/5 4/6 5/7 6/8
6/4
5/3
4/2
3/1
½ 3/5 2/3 5/7 3/4
1/1
9/8 25/21
4/3
9/5
3/1
Oktavenraum
4000
5000
6000
7000
λ = Å



Balmer-Serie
Hδ
Hγ
Hβ
Hα
0/0
1/2
1/1
36/32
25/21
16/12
9/5
$\frac{m^2}{m^2-2^2}$
32 21 12 5
m^2-2^2
24 20 16 12
4m
pythagoreische Dreiecke
40 29 20 13
m^2+2^2
∞ 6 5 4 3
m
Serien-grenze

Die Spektrallinien der Lyman-Serie bilden die zahlenmäßig einfachste Reihe. Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über den harmonikalen Hintergrund, der in den pythagoreischen Zahlen sowie in der inneren und äußeren Teilung und in den entsprechenden Intervallen des Oktavenraums besteht.

Wellenlänge	m	m/1	$\frac{m^2}{m^2-1^2}$	pythagoreische Zahlen			Intervalle innere Teilung	Intervalle äußere Teilung
				m^2-1	2m	m^2+1^2	$\frac{m}{m+1}$	$\frac{m}{m-1}$
1215.7	2	2/1	4/3	3	4	5	2/3	2/1
1025.7	3	3/1	9/8	8	6	10	3/4	3/2
972.5	4	4/1	16/15	15	8	17	4/5	4/3
949.7	5	5/1	25/24	24	10	26	5/6	5/4
937.8	6	6/1	36/35	35	12	37	6/7	6/5
|	|		|				|	|
911.75 Seriengrenze	∞		1/1				1/1	1/1

Die Spektrallinien der folgenden Serien (n = 2, 3, 4, 5) bieten ein ähnliches Bild, wobei es jedoch zu einer weiteren Differenzierung innerhalb des harmonikalen Ordnungsschemas kommt. Es treten jetzt auch die Vielfachen der pythagoreischen Zahlen und der Intervalle auf, analog zu den Vielfachen der Zahlenpaare.

Serie				
Lyman-Serie	m	1	2, 3, 4, 5, 6 →	∞
	$\frac{m^2}{m^2-1^2}$	∞	4/3, 9/8, 16/15, 25/24, 36/35 →	1/1
innere Teilung	$\frac{m}{m+1}$	1/2	2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7 →	1/1
äußere Teilung	$\frac{m}{m-1}$	1/0	2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5 →	1/1
Balmer-Serie	m	2	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 →	∞
	$\frac{m^2}{m^2-2^2}$	∞	9/5, 16/12, 25/21, 36/32, 49/45, 64/60, 81/77, 100/96, 121/117, 144/140 →	1/1
innere Teilung	$\frac{m}{m+2}$	2/4	3/5, 4/6, 5/7, 6/8, 7/9, 8/10, 9/11, 10/12, 11/13, 12/14 →	2/2
äußere Teilung	$\frac{m}{m-2}$	2/0	3/1, 4/2, 5/3, 6/4, 7/5, 8/6, 9/7, 10/8, 11/9, 12/10 →	1/1
Paschen-Serie	m	3	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 →	∞
	$\frac{m^2}{m^2-3^2}$	∞	16/7, 25/16, 36/27, 49/40, 64/55, 81/72, 100/91 →	1/1
innere Teilung	$\frac{m}{m+3}$	3/6	4/7, 5/8, 6/9, 7/10, 8/11, 9/12, 10/13 →	3/3
äußere Teilung	$\frac{m}{m-3}$	3/0	4/1, 5/2, 6/3, 7/4, 8/5, 9/6, 10/7 →	1/1
Brackett-Serie	m	4	5, 6, 7, 8, 9, 10 →	∞
	$\frac{m^2}{m^2-4^2}$	∞	25/9, 36/20, 49/33, 64/48, 81/65, 100/84 →	1/1
innere Teilung	$\frac{m}{m+4}$	4/8	5/9, 6/10, 7/11, 8/12, 9/13, 10/14 →	4/4
äußere Teilung	$\frac{m}{m-4}$	4/0	5/1, 6/2, 7/3, 8/4, 9/5, 10/6 →	1/1
Pfund-Serie	m	5	6, 7, 8, 9, 10 →	∞
	$\frac{m^2}{m^2-5^2}$	∞	36/11, 49/24, 64/39, 81/56, 100/75 →	1/1
innere Teilung	$\frac{m}{m+5}$	5/10	6/11, 7/12, 8/13, 9/14, 10/15 →	5/5
äußere Teilung	$\frac{m}{m-5}$	5/0	6/1, 7/2, 8/3, 9/4, 10/5 →	1/1
Oktavenreihe	$\frac{m}{m+n}$	1/2	2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7	1/1

Die einzelnen Serien stehen auch noch untereinander in einer ganzzahligen Relation. Aufbauend auf die Seriengrenze der Lyman-Serie lassen sich durch Quadrierung von n die verschiedenen Serien miteinander verbinden. Die Wellenlängen der Seriengrenzen verhalten sich wie

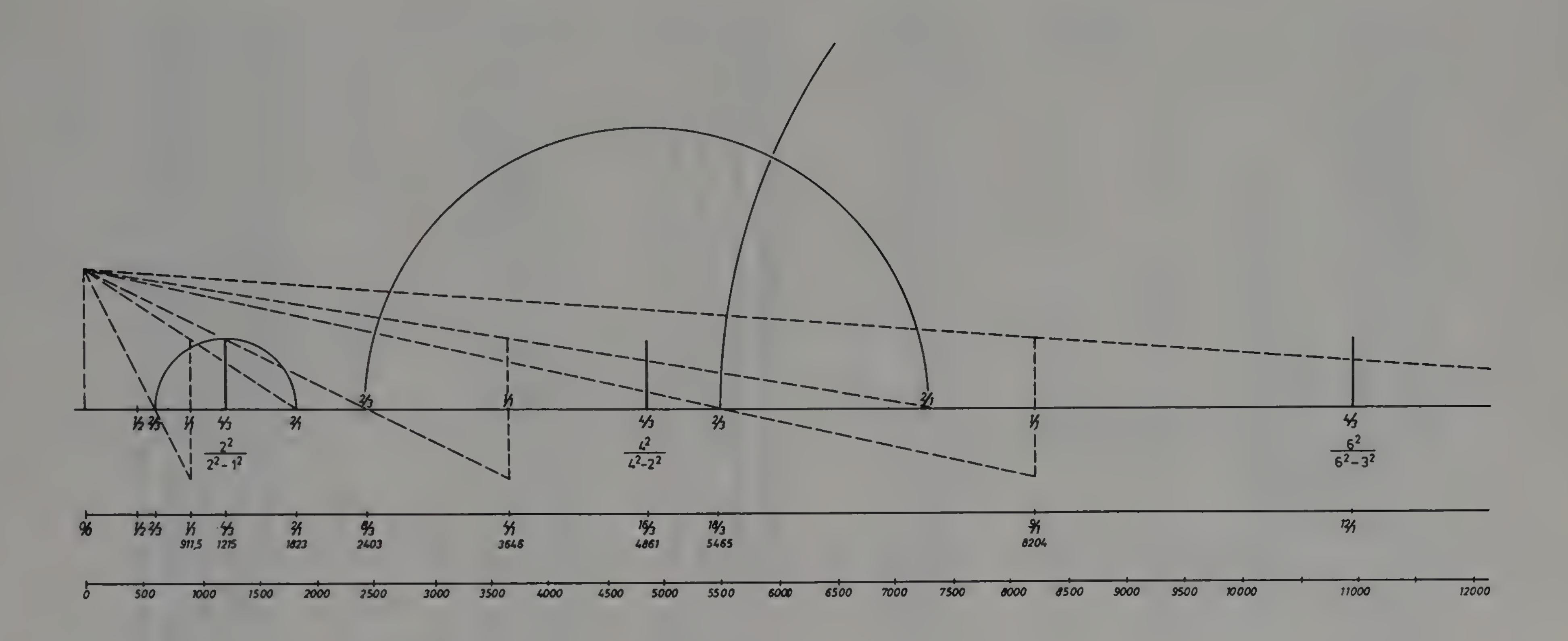
	Lyman-	Balmer-	Paschen-	Brackett-	Pfund-Serie
n^2 :	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
n :	1	2	3	4	5
λ in Å:	911.7	3646	8204	14 584	22 788

Die erste Spektrallinie H_α in der Lymanserie mit $\lambda = 1215$ hat die Verhältniszahl 4/3. Diese entspricht der Linie H_β in der Balmer-Serie mit 16/12 und H_γ in der Paschen-Serie mit 36/27 usw. Mathematisch sind sie an das pythagoreische Dreieck 3–4–5 und seine Vielfachen gebunden (vgl. die Diagramme der Seiten 155, 156 und 161).

Das erste pythagoreische Dreieck 3–4–5 bildet so in den ersten beiden Spektrallinien des Wasserstoffatoms – der H_α- und H_β-Linie der Lyman-Serie – den Anfang der Reihe der pythagoreischen Zahlen. Es tritt aber auch auf in der

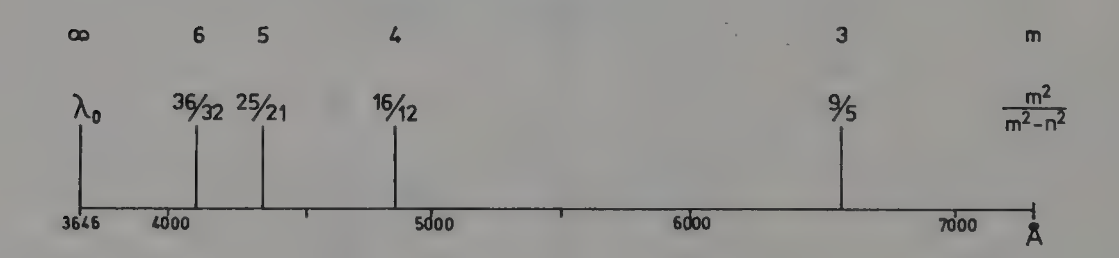
2. und 4. Spektrallinie der Balmer-Serie,
3. und 6. Spektrallinie der Paschen-Serie,
4. und 8. Spektrallinie der Brackett-Serie,
5. und 10. Spektrallinie der Pfund-Serie.

Es ist das einzige pythagoreische Dreieck, das komplementär direkt in den jeweiligen Serienspektren auftritt, während bei den anderen pythagoreischen Zahlen die Komplementarität nur über verschiedene Serien zum Vorschein kommt. Die besondere Stellung dieses ersten pythagoreischen Dreiecks wird dadurch noch unterstrichen (vgl. die Diagramme der Seiten 156 und 161).


$\frac{2^2}{2^2-1^2}$
$\frac{4^2}{4^2-2^2}$
$\frac{6^2}{6^2-3^2}$
911,5
1215
1823
2403
3646
4861
5465
8204
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
5500
6000
6500
7000
7500
8000
8500
9000
9500
10000
11000
12000

In der bisherigen Form der geometrischen Darstellung sowie in der Balmerschen Konstruktion (138) liegt ein linearer Maßstab für die Wellenlängenskala der Spektrallinien vor. Dieser ist identisch mit dem Gitterspektrum, da in diesem Fall die Ablenkung der Spektrallinien direkt proportional der Wellenlänge ist.

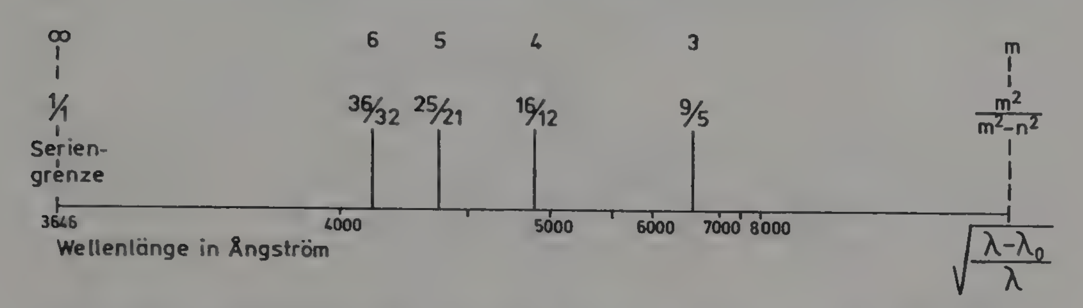
Gitterspektrum der Balmer-Serie (real)



Während beim Gitterspektrum rotes Licht stärker abgelenkt wird als violettes, ist dies beim Prismenspektrum umgekehrt. Bei den Prismen kommen durch die Materialbeschaffenheit, z. B. Glas oder Quarz, noch weitere Stoffkonstanten für die Brechung und Dispersion hinzu, die für eine reale Wellenlängenskala berücksichtigt werden müssen. Unabhängig davon kann man jedoch ein

idealisiertes Schema für das Prismenspektrum aufstellen, das den eigentlichen harmonikalen Hintergrund in den Abständen der Spektrallinien deutlich macht. (Eine spätere Veröffentlichung soll auf diesen Unterschied näher eingehen).

Prismenspektrum der Balmer-Serie (idealisiert)



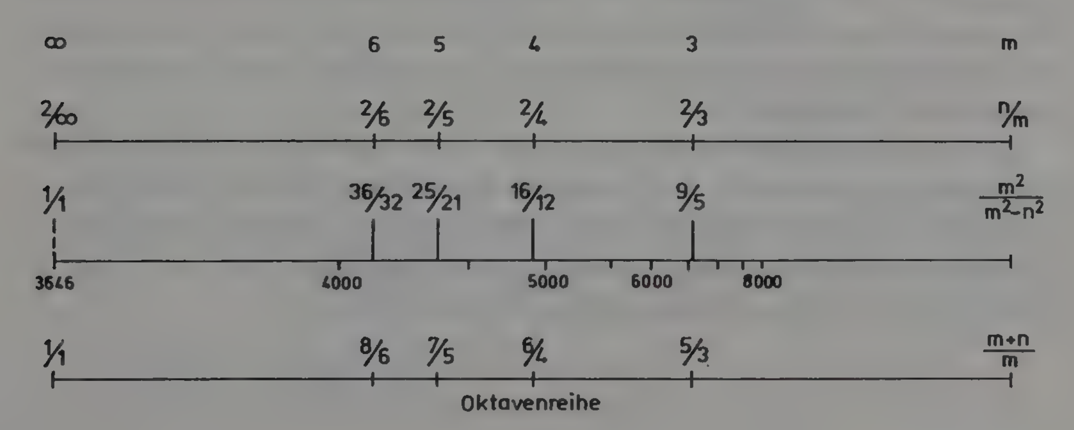
Ein solches „Prismenspektrum" läßt sich ableiten, indem man von dem Verhältnis des Zahlenpaares n/m ausgeht und dieses mit dem mathematischen Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

verbindet und auf eine Wellenlängenskala überträgt.

$$\frac{n}{m} = \sqrt{\frac{\frac{m^2}{m^2 - n^2} - 1}{\frac{m^2}{m^2 - n^2}}} = \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}}$$

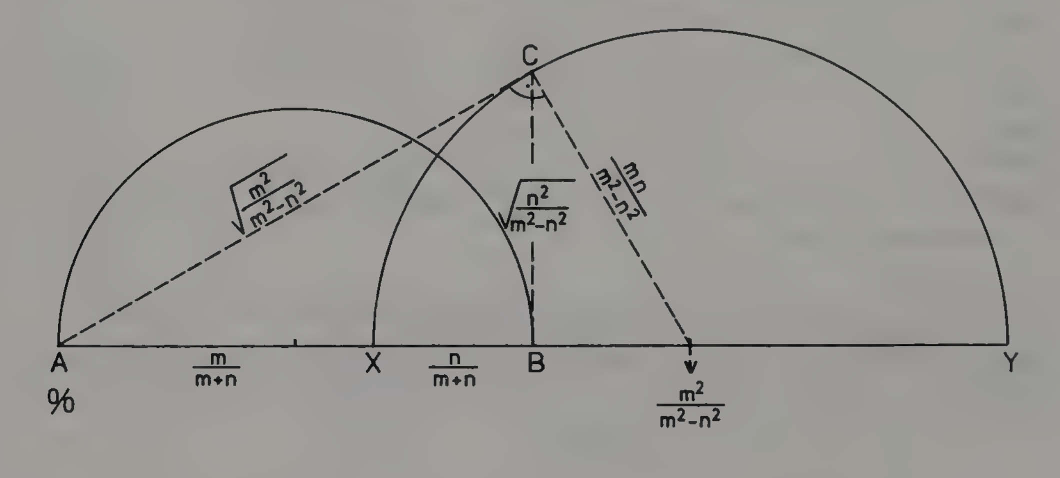
Dadurch ist es möglich, eine direkte Beziehung von den Zahlenpaaren m/n zu den Intervallen $(m + n)/m$ und den Verhältniszahlen $m^2/(m^2 - n^2)$ herzustellen und sie in den reziproken Oktavenraum $1/1 - 2/1$ einzuordnen.



Das Verhältnis

$$\frac{n}{m} = \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}}$$

das den Maßstab für diese Wellenlängenskala bestimmt, läßt sich geometrisch über die harmonische Teilung weiter aufschlüsseln. Als Einheit 1/1 wird die Strecke AB mit dem Teilungsverhältnis n/m vorgegeben.

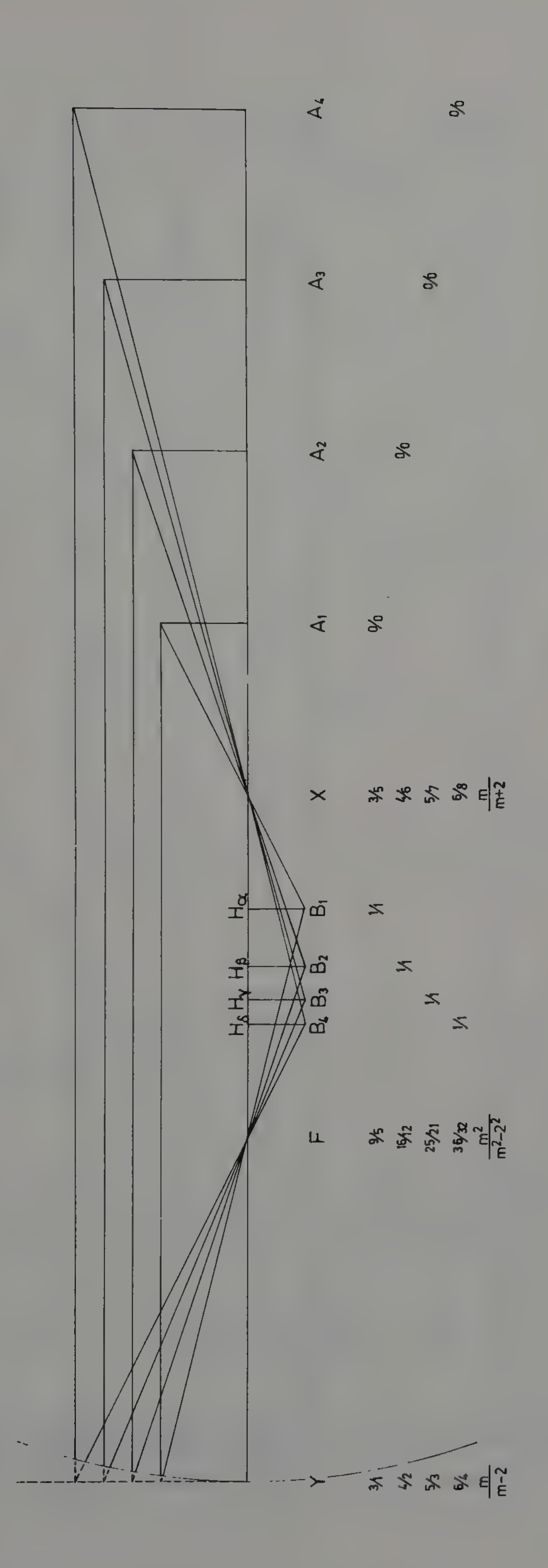


$$\frac{n}{m} = \frac{CB}{CA} = \sqrt{\frac{\frac{n^2}{m^2-n^2}}{\frac{m^2}{m^2-n^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{m^2}{m^2-n^2}-1}{\frac{m^2}{m^2-n^2}}} = \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}}$$

Damit wird der innere Zusammenhang zwischen den einzelnen Zahlenstrukturen deutlich, der gerade für eine harmonikale Bewertung so wichtig ist.

Die harmonische Teilung in der Optik (148) gibt ein weiteres Beispiel dafür, den Abstand der Spektrallinien in einem theoretischen bzw. idealisierten Prismenspektrum zu konstruieren. Auch diese Darstellung, wie sie am Beispiel der vier ersten Linien des Balmerspektrums entwickelt wurde, ist gut geeignet, den harmonikalen Hintergrund der Spektrallinien erkennen zu lassen (siehe das nebenstehende Diagramm).

Im Gesamtbild aller fünf Serienspektren (siehe die Tafeln der Seiten 160 und 161) kommt insbesondere der Zusammenhang in der vertikalen Ebene zum Vorschein, indem bei gleichem Zahlenverhältnis n/m in den verschiedenen Zahlenebenen die einander entsprechenden Verhältniszahlen $m^2/(m^2 - n^2)$ und Intervalle $(m + n)/m$ direkt untereinander angeordnet sind.



Balmer-Serie
A₁
A₂
A₃
A₄
X
3/5
4/6
5/7
6/8
m/m+2
Hα
Hβ
Hγ
Hδ
B₁
B₂
B₃
B₄
1/1
1/1
1/1
1/1
F
9/5
16/12
25/21
36/32
m²/m²-2²
Y
3/1
4/2
5/3
6/4
m/m-2

Harmonikales Spektralschema

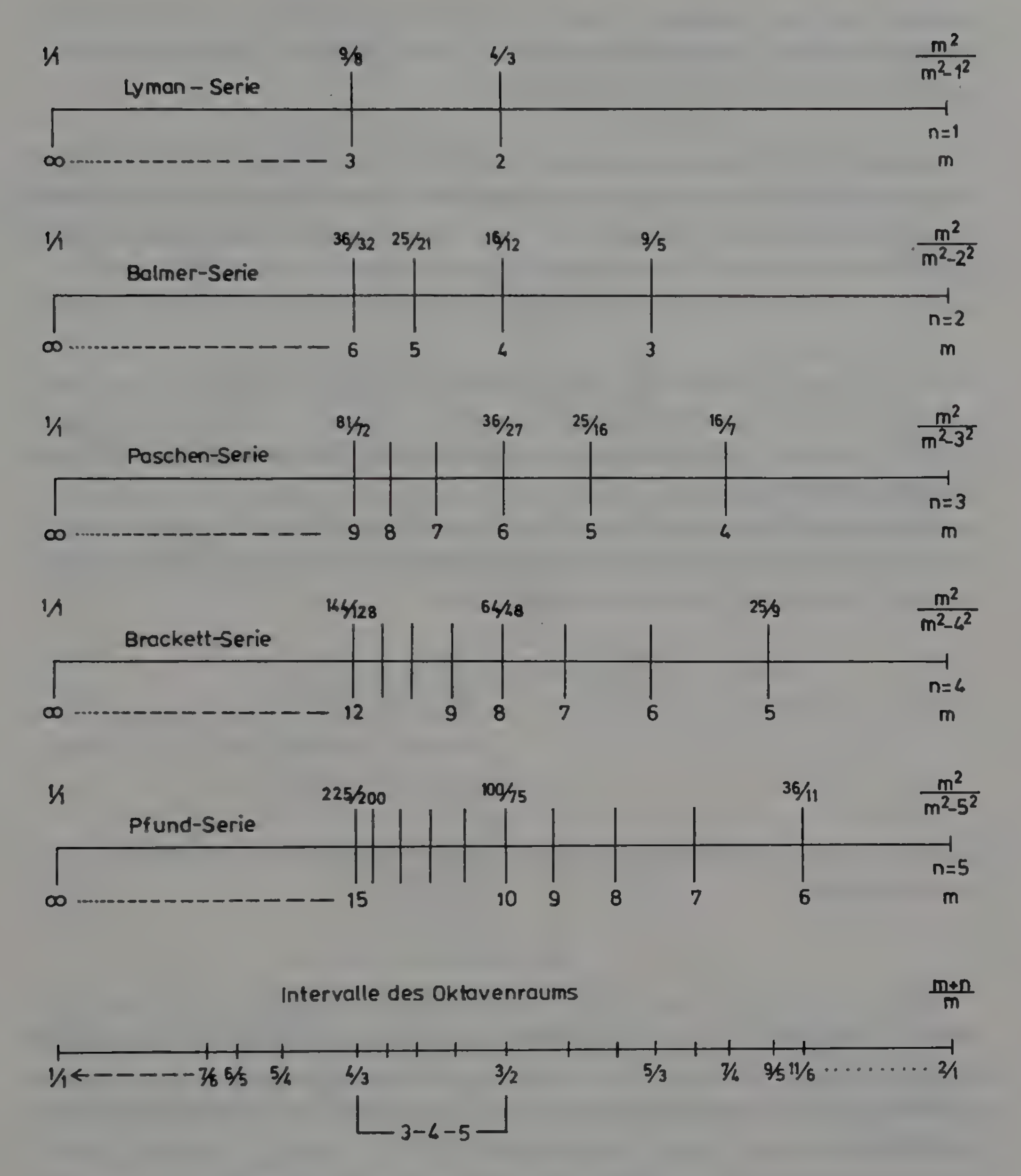
Lyman-Serie

Balmer-Serie

Paschen-Serie

Brackett-Serie

Pfund-Serie



Das wichtigste Ergebnis bleibt auch hier der Hinweis auf die beiden Grenzen des Oktavenraums, die – obwohl beide nur mathematisch direkt erfaßbar sind – dennoch eindeutig über die harmonische Teilung abgeleitet werden konnten.

1/1 Spektrallinien $\frac{m^2}{m^2-n^2}$ ∞

1/1 Intervalle $\frac{m+n}{m}$ 2/1

Diese Darstellung eines theoretischen Prismenspektrums, das unabhängig von den Stoffkonstanten irgendwelcher Prismen ist, läßt sich damit direkt in eine

Analogie zu einer klingenden Saite eines Monochords bringen. Dadurch gewinnt eine solche Ableitung gerade für die Frage nach der Harmonie in den Spektrallinien eine besondere Bedeutung.

Schon W. RITZ[1] kommt in seiner Dissertation von 1903 zu einer interessanten geometrischen Aussage bei der Interpretation der Formel für die Serienspektren: *Trotz vielfacher Versuche ist es mir nicht gelungen, eine andere geometrische Figur zu Grunde zu legen als das Quadrat. Man kann sich dasselbe vielleicht als eine der Flächen eines Kubus vorstellen. Die Symmetrie der Formel*

$$\frac{1}{\lambda} = \nu = Ry\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right] = Ry\left[\frac{(m+n)\cdot(m-n)}{m^2\cdot n^2}\right]$$

entspricht sehr der eines Quadrates mit seinen zwei Diagonalen, nicht aber der einer Kugelfläche.

Im Ansatz ist hier jedoch nicht eine Symmetrie, sondern die harmonische Teilung vorgegeben, die nur über die ältere Schreibweise, wie sie Balmer 1885 vorlegte, geometrisch abgeleitet werden kann.

$$\lambda = C\cdot\frac{m^2}{m^2-n^2} = C\cdot\underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\text{innere}}\cdot\underbrace{\frac{m}{m-n}}_{\text{äußere}}$$

innere äußere
harmonische Teilung

Auf das von Ritz entwickelte Kombinationsprinzip für die Spektrallinien, in dem ebenfalls

$$\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right]$$

auftritt, wird hier nicht weiter eingegangen, um dieses Thema nicht zu sehr zu spezialisieren.

Das für die Harmonie entscheidende Strukturglied ist der mathematische Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2-n^2} \quad \text{bzw.} \quad n^2\cdot\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

der in allen Linienspektren des Wasserstoffatoms vorkommt und in dem m und n ganze Zahlen (Quantenzahlen) bedeuten. Dies ist in beiden Darstellungsformen der Fall, sowohl in der älteren von Balmer als auch in der neueren von Rydberg.

1) W. Ritz, Zur Theorie der Serienspektren, Leipzig 1903, 20. 22. 46.

$$\lambda = C \cdot \frac{m^2}{m^2 - n^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{n^2}{C} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Balmer   Rydberg

Die Konstante C wurde von Niels BOHR[1] weiter aufgeschlüsselt und direkt in eine Beziehung zum Planckschen Wirkungsquantum h, zur Ladung e und zur Masse m des Elektrons gesetzt.

$$C = \frac{h^3}{2\pi^2 \cdot e^4 \cdot m}$$

Dabei spielte für Bohr die Balmersche Formel bei der Entwicklung seines Atommodells eine besondere Rolle: *As soon als I saw Balmer's formula the whole thing was immediately clear to me*[2].

Die Frage der Harmonie wurde durch die neue Konzeption des Bohrschen Atommodells gar nicht berührt, da die Rydberg-Konstante nur irrationale Elemente aufweist, während der mathematische Ausdruck

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}$$

unverändert rational blieb und auf seinen harmonikalen Hintergrund gar nicht untersucht wurde[3]:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Die Diskrepanz zwischen den klassischen Vorstellungen von Intervallen und harmonischen Oberschwingungen, wie sie analog aus dem akustischen Bereich bekannt waren, und den Schwingungskomponenten im Bohrschen Atommodell blieb erhalten. Bohrs Ausführungen zu den *harmonischen Schwingungen, Obertönen, Oktave* u. ä. lassen die Verschiedenheit der Begriffe deutlich hervortreten[4].

Der mathematische Ausdruck

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2} \quad \text{bzw. dessen Kehrwert} \quad n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

1) N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau, Braunschweig 1922, 26.
2) U. Hoyer, Bohrs Weg zur Atomtheorie, in: Physikalische Blätter 38, 1982, 348; A. Hermann, Frühgeschichte der Quantentheorie, Mosbach i. B. 1969, 173f.
3) Nach: O. Höfling, Physik, Band 2, Teil 3: Quanten und Atome, Bonn 1979[12], 759.
4) N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau, 28ff.

ist auch in den Spektren anderer Elemente der eigentliche harmonikale Grundbaustein. Seine Interpretation am konkreten Beispiel der fünf Linienspektren des Wasserstoffatoms gibt nun die Möglichkeit, sie auch auf den weiteren Bereich der Atome und Moleküle auszudehnen, so daß sich diese über die Spektrallinien durchaus im Sinne eines idealen harmonischen Oszillators interpretieren lassen.

Dies gilt z. B. für das Moseley'sche Gesetz (1913), in dem ebenfalls der mathematische Ausdruck $1/n^2 - 1/m^2$ enthalten ist.

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot (Z - 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Z = Kernladungszahl eines Elementes
λ = 10^{-1} bis 10^{1} Å (als Röntgenstrahlen)

Auch in diesem Fall ist es möglich, über die ganzen Zahlen m und n einen Zusammenhang mit den pythagoreischen Zahlen herzustellen und damit harmonikal zu interpretieren. Vor allem das Moseley'sche Gesetz gestattet die Ausweitung auf das gesamte Periodensystem der Elemente, wodurch der harmonikale Aufbau sich als ein allgemeines Naturprinzip interpretieren ließe. Ein detailliertes Eingehen auf diese schwierige Thematik ist jedoch in diesem Rahmen nicht möglich.

Die Entdeckung der Formel durch Balmer bedeutete einen wichtigen Meilenstein im physikalischen Verständnis der Spektrallinien und wird 1984 100 Jahre alt. J. J. Balmer führte damit die ganzen Zahlen m und n in das spezielle Gebiet der Spektrallinien ein. Diese allein bestimmen Ort und Reihenfolge innerhalb eines Serienspektrums. Es sind die gleichen Zahlen, wie sie Chr. J. WEISS über das Rationalitätsgesetz in die Kristallographie einführte. Rationalität ist damit ein wesentliches Merkmal in der Naturbeschreibung. Für die Frage der Harmonie bildet die Formel von Balmer eine Schlüsselfigur, da in ihr wichtige harmonikale Strukturelemente enthalten sind:

- Die pythagoreischen Zahlen treten komplementär im Gesamtbereich der Linienspektren des Wasserstoffatoms auf; und
- über die harmonische Teilung lassen sich die den ganzen Zahlen m und n entsprechenden Intervalle ableiten und
- innerhalb eines oktavbegrenzten Raumes einordnen.

Die Bezeichnung *harmonische Linienspektren,* wie sie vor der Entdeckung der Balmerschen Formel geprägt wurde, hatte also durchaus ihre Berechtigung. Es fehlte lediglich der letzte Schritt, die Formel

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

mathematisch zu zerlegen und im Sinne der harmonischen Teilung auszulegen.

Da die Spektrallinien im sichtbaren Bereich des Lichts in ihren Wellenlängen ganz bestimmten Farben entsprechen, ist es wahrscheinlich, über das Komplementaritätsprinzip auch zu einer *Harmonie der Farben* zu kommen. Die Schwierigkeiten für den konkreten Nachweis harmonikaler Strukturelemente, wie z. B. komplementärer Intervalle, sind zweifellos groß. Und doch muß es diese auch in den Farben geben, wenn Harmonie in der Natur ein allgemein gültiges Prinzip sein soll.

Mit der harmonikalen Interpretation der Spektrallinien des Wasserstoffatoms liegt damit ein weiteres Beispiel eines harmonikal-strukturierten Raumes vor, dessen innere und äußere Begrenzung durch die Oktave festgelegt ist. Die Idee einer räumlichen Begrenzung, die nur harmonikal erfaßbar ist, findet somit auch im Spektralbereich des Wasserstoffatoms ihre Bestätigung. Der strukturelle Nachweis von Intervallen innerhalb des Oktavenraumes begründet darüber hinaus auch die Harmonie in den Linienspektren und damit erst die eigentliche Spektralmusik in den Atomen.



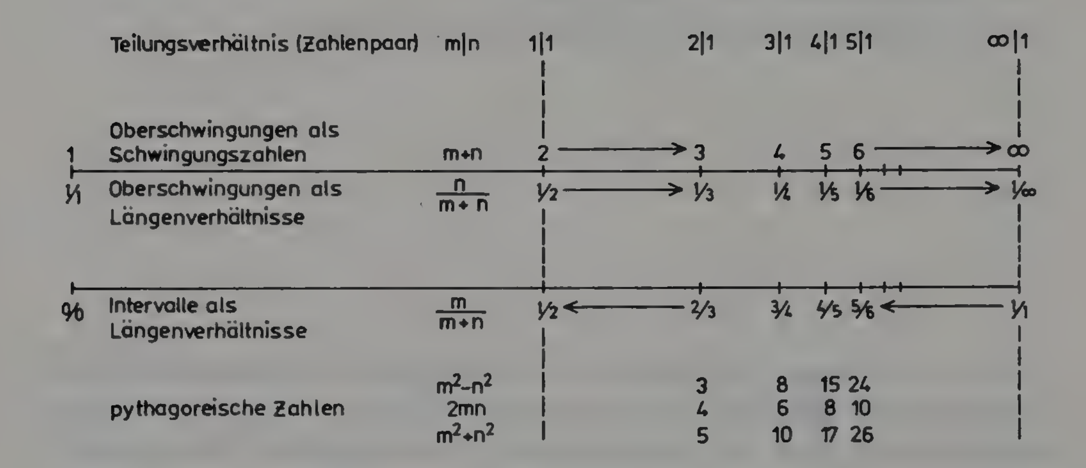
PYTHAGOREISCHE ZAHLEN IN HARMONIKALEN ORDNUNGSSYSTEMEN

Aus den bisherigen Ausführungen zur Interpretation der (kubischen) Kristalle und der Spektrallinien des Wasserstoffatoms ergibt es sich von selbst, die pythagoreischen Zahlen auch zur Darstellung von harmonikalen Ordnungssystemen heranzuziehen. Dabei bilden die pythagoreischen Zahlen mit den zugeordneten Zahlenpaaren und den komplementären Intervallen den Kern einer harmonikalen Zahlentheorie, die es ermöglicht, diese drei grundverschiedenen mathematischen Zahlenebenen zu einer Einheit zu verbinden und stereometrisch auf das rechtwinklige Achsenkreuz innerhalb eines Tonraums zu übertragen. Das Vorbild für eine derartige strukturelle Verbindung von Zahlen war zunächst in den (kubischen) Kristallen gegeben, da an diesen Körpern die drei Zahlenebenen konkret nachgewiesen werden konnten. In den Spektrallinien des Wasserstoffatoms ließ sich über die harmonikale Interpretation der Balmerschen Formel ein Ordnungsprinzip ableiten, das diese drei Zahlenelemente zu einem harmonikalen Gesamtsystem verband. Die ganzen Zahlen h und k der Kristallindizes bzw. m und n in den Spektrallinien bilden als Zahlenpaare den Ausgangspunkt zur Darstellung der pythagoreischen Zahlen wie auch der Intervalle, entsprechend der Formel:

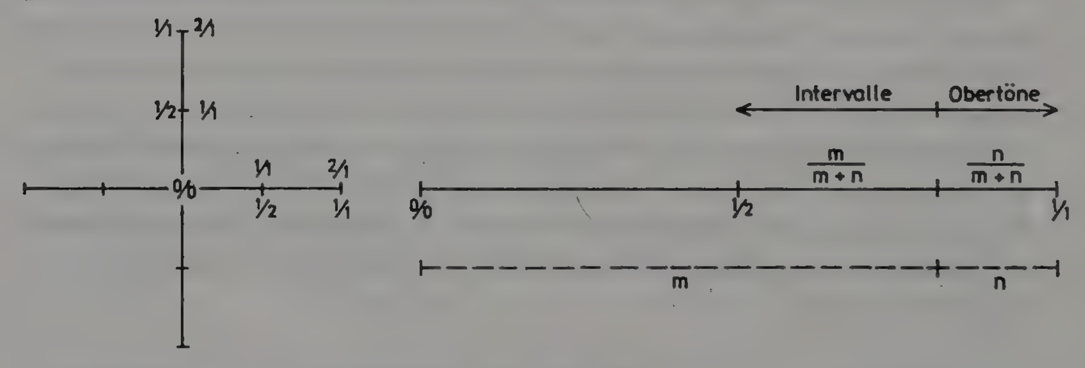
Zahlenpaare	pythagoreische Zahlentripel	Intervalle
m/n	$(m^2 - n^2) + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$	$\frac{m}{m+n}$

Aus dieser harmonikalen Einheit der drei verschiedenen Strukturebenen lassen sich 1. das mathematische Prinzip der Obertonreihe und 2. ein hierarchisches Ordnungsprinzip für die Intervalle innerhalb des Oktavenraumes ableiten.

In der Obertonreihe liegt das Prinzip einer Reihenfolge von ganzen Zahlen vor, die als Schwingungszahlen auf eine Grundschwingung bezogen sind. Es ist jedoch anschaulicher, die Obertonreihe mit den Längenverhältnissen einer schwingenden Saite zu verbinden, wie dies in der musikalischen Akustik der Fall ist. Dabei ergibt sich bekanntlich ein verengendes Prinzip:

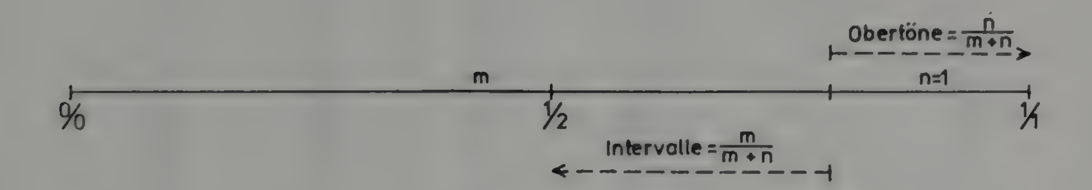


Durch das Teilungsverhältnis (= Zahlenpaar) wird einerseits das Intervall festgelegt, wie sich andererseits aus der Ergänzung zur ganzen Strecke (oder Saite) der dazugehörige Oberton ergibt. Beide sind auf den gleichen Punkt der Strecke des Achsenkreuzes bzw. der Saite innerhalb des Oktavenraums bezogen.

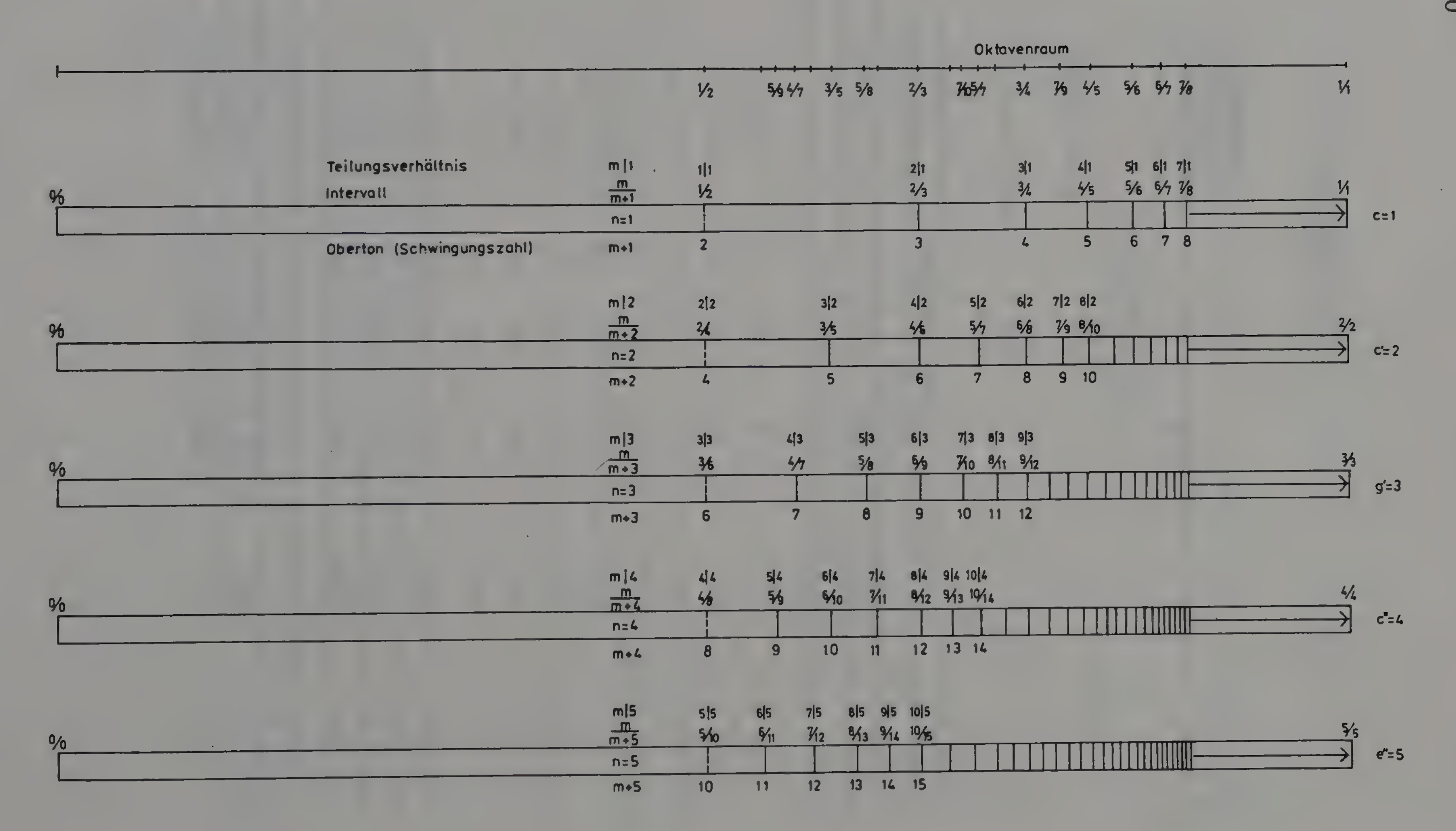


Überträgt man diesen harmonikalen Sachverhalt auf weitere Teilungsverhältnisse, in denen n = 2, 3, 4, 5 und m > n ist, so ergibt sich ein Gesamtschema von sich immer weiter differenzierenden, übereinandergelagerten Obertonreihen, die jede für sich genommen den Rahmen einer Oktave nicht überschreiten und sich dennoch auf den gleichen Oktavenraum beziehen lassen. Das Ordnungsprinzip in den übereinander angeordneten Obertonreihen ist damit in erster Linie ein Reihenprinzip mit der gleichen Bezugsgröße n, wobei diese Größen n wiederum der Obertonreihe entsprechen.





Teilungsverhältnis der Saite	Intervall		pythagoreische Zahlen			Oberton als Differenz zur ganzen Saite	
m : 1	$\frac{m}{m+1}$	Ton	2m	$m^2 - 1^2$	$m^2 + 1^2$	$\frac{1}{m+1}$	Ton
1 : 1	1/2	c				1/2	c
2 : 1	2/3	g	4 –	3 –	5	1/3	g
3 : 1	3/4	f	6 –	8 –	10	1/4	c'
4 : 1	4/5	e	8 –	15 –	17	1/5	e'
5 : 1	5/6	es	10 –	24 –	26	1/6	g'
6 : 1	6/7	es-	12 –	35 –	37	1/7	b-'
7 : 1	7/8	d+	14 –	48 –	50	1/8	c''
8 : 1	8/9	d	16 –	63 –	65	1/9	d''
9 : 1	9/10	d-	18 –	80 –	82	1/10	e''
10 : 1	10/11		20 –	99 –	100	1/11	f+''
11 : 1	11/12		22 –	120 –	124	1/12	g''
12 : 1	12/13		24 –	143 –	145	1/13	a-''
13 : 1	13/14		26 –	168 –	170	1/14	b-''
14 : 1	14/15		28 –	195 –	197	1/15	h''
15 : 1	15/16		30 –	224 –	226	1/16	c'''


Oktavenraum
Teilungsverhältnis
Intervall
Oberton (Schwingungszahl)
m|1
n=1
m+1
c=1
m|2
n=2
m+2
c'=2
m|3
n=3
m+3
g'=3
m|4
n=4
m+4
c''=4
m|5
n=5
m+5
e''=5

Dadurch, daß jede dieser Obertonreihen einen anderen Bezugston hat, wird es verständlich, daß dem gleichen Oberton verschiedene Intervalle entsprechen können.

z. B.	4/3	5/2	6/1	Teilungsverhältnis	m/n
	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	Intervall	$\frac{m}{m+n}$
	7	7	7	Oberton (als Schwingungszahl)	$m + n$

Das hier vorgestellte Obertonprinzip einer übereinander angeordneten Reihenentwicklung ist nicht auf den musikalisch-akustischen Bereich beschränkt, sondern bildet die harmonikale Grundlage auch in den Spektrallinien des Wasserstoffatoms als Bestandteil der inneren harmonischen Teilung. Es ist über ein derartiges Schema sehr einfach, aus dem Teilungsverhältnis einer Strecke (= Saite) direkt das Intervall und als Restintervall den Oberton zu bestimmen und stereometrisch auf das Achsenkreuz zu übertragen.

Die pythagoreischen Zahlen treten hier nicht direkt in Erscheinung, obwohl sie den eigentlichen harmonikalen Hintergrund bilden. Ohne diesen strukturellen Zusammenhang von Zahlenpaaren, Intervallen und Obertönen mit den pythagoreischen Zahlen bliebe ein derartiges Schema ein rein theoretisches Modell.

Der Oktavenraum ist der begrenzende Rahmen nicht nur für die Entwicklung von Reihen nach dem Obertonprinzip, sondern auch für die Idee einer Rangordnung von Intervallen, bei der die besondere Funktion der pythagoreischen Zahlen noch deutlicher hervortritt.

Die Vorstellung einer harmonikalen Rangordnung setzt den Vergleich von Intervallen innerhalb eines geordneten Systems voraus. Sie wird im übertragenen Sinne bekanntlich durch eine von oben nach unten abnehmende Bedeutung gekennzeichnet. Eine solche Fragestellung kann allgemein auf hierarchische Strukturen in der Natur übertragen werden[1].

Über die Beziehung der komplementären Intervalle zu den Zahlenpaaren und den pythagoreischen Zahlen läßt sich auf mathematischer Basis eine Intervallordnung ableiten, die der vorgegebenen Definition entspricht. Die Ableitung einer Intervallreihe mit entsprechend abnehmender Bedeutung wird hier durch die Hypotenusen $m^2 + n^2$ der pythagoreischen Dreiecke bestimmt.

Der mathematische Ausdruck der Quadratsumme $a^2 + b^2$ findet sich in der

1) Vgl. L. L. Whyte et al. (eds.), Hierarchical Structures: Proceedings, New York 1969.

angewandten Mathematik häufig bei der Bestimmung von Kristallstrukturen[1] über die Röntgenspektren $\sqrt{h^2 + k^2}$ wie auch in der harmonischen Analyse[2] von Klängen $\sqrt{a^2 + b^2}$ (Fourieranalyse) oder bei den Klangfiguren[3] quadratischer Membranen $\sqrt{a^2 + b^2}$, um nur einige konkrete Beispiele zu nennen. Über die Hypotenusen liegt damit ein einfaches mathematisches Prinzip vor, die pythagoreischen Zahlen und die ihnen entsprechenden Intervalle in ein hierarchisches System, wie es der Oktavenraum darstellt, einzubinden.

Die folgende Tabelle bringt die Rangordnung der Intervalle bis zum pythagoreischen Dreieck 11–60–61[4].

1) P. Niggli, Krystallographische und strukturtheoretische Grundbegriffe, 3. Kap.: Kubische Krystalle und Krystallräume, Quadratsummen der Indizes von 1 bis 100, in: Handbuch der Experimentalphysik, Leipzig 1928, 120f.
2) Handbuch der Physik, 2. Band: Akustik, Leipzig 1909, 35.
3) Ebenda, 368f.
1) Eine umfassendere Zusammenstellung von Zahlenpaaren, pythagoreischen Zahlen und Intervallen (ohne deren Vielfache), die alle Hypotenusengrößen kleiner als 275 einschließt, ist im Anhang (246) beigefügt.

Harmonikale Rangordnung

Zahlen-paare	pythagoreische Zahlentripel Katheten		Hypotenuse	Rangordnung der Intervalle		Vielfache der Grundtripel
m/n	m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2	$\frac{m}{m+n}$		
2/1	3	4	5	2/3		1 (3–4–5)
3/1	8	6	10	3/4		2 (3–4–5)
3/2	5	12	13	3/5		1 (5–12–13)
–	9	12	15	–		3 (3–4–5)
4/1	8	15	17	4/5		1 (8–15–17)
4/2	12	16	20	4/6	2/3	4 (3–4–5)
4/3	7	24	25	4/7		1 (7–24–25)
–	15	20	25	–		5 (3–4–5)
5/1	24	10	26	5/6		2 (5–12–13)
5/2	21	20	29	5/7		1 (20–21–29)
–	18	24	30	–		6 (3–4–5)
5/3	16	30	34	5/8		2 (8–15–17)
–	21	28	35	–		7 (3–4–5)
6/1	12	35	37	6/7		1 (12–35–37)
–	15	36	39	–		3 (5–12–13)
6/2	32	24	40	6/8	3/4	8 (3–4–5)
5/4	9	40	41	5/9		1 (9–40–41)
6/3	27	36	45	6/9	2/3	9 (3–4–5)
7/1	48	14	50	7/8		2 (7–24–25)
–	30	40	50	–		10 (3–4–5)
–	24	45	51	–		3 (8–15–17)
6/4	20	48	52	6/10	3/5	4 (5–12–13)
7/2	45	28	53	7/9		1 (28–45–53)
–	33	44	55	–		11 (3–4–5)
7/3	40	42	58	7/10		2 (20–21–29)
–	36	48	60	–		12 (3–4–5)
6/5	11	60	61	6/11		1 (11–60–61)

Untersucht man ein derartig aufgeschlüsseltes harmonikales Ordnungssystem genauer, so ergibt sich:

1) Die Vielfachen der Zahlenpaare führen auch zu den entsprechenden Vielfachen der pythagoreischen Zahlen und der Intervalle, entsprechend den angegebenen Formeln.

	Zahlenpaare	pythagoreische Zahlen			Intervalle
	m/n	$(m^2 - n^2)^2$ +	$(2mn)^2$ =	$(m^2 + n^2)^2$	$\frac{m}{m+n}$
z. B.	2/1	3	4	5	2/3
	3/1	8	6	10	3/4
	4/2	12	16	20	4/6
	6/2	32	24	40	6/8
	6/3	27	36	45	6/9
	9/3	72	54	90	9/12

Je zwei Zahlenpaare bilden analog zu den Intervallen eine komplementäre Einheit, und dies gilt auch für die Vielfachen der beiden anderen Zahlengrößen.

2) Andererseits gibt es jedoch zahlreiche Vielfache von pythagoreischen Zahlentripeln, die sich nicht in dieses Schema einordnen lassen. Als Beispiel werden hier nur einige Vielfache des Grundtripels 3–4–5 angeführt.

9	12	15
15	20	25
18	24	30
21	28	35
30	40	50

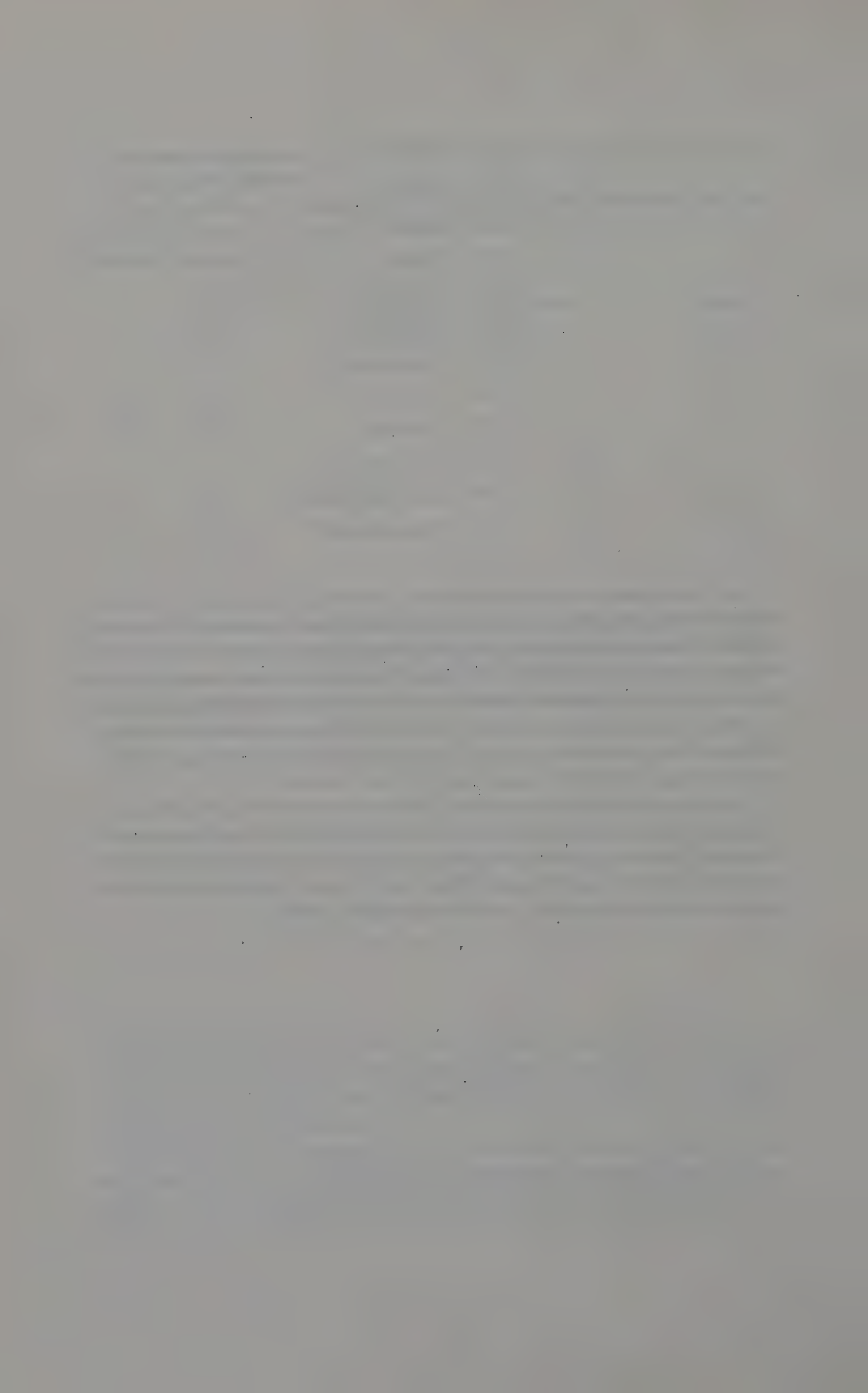
Über die entsprechenden Formeln lassen sich diese pythagoreischen Zahlentripel weder mathematisch aus Zahlenpaaren aufbauen noch harmonikal in Intervalle umwandeln. Damit ist ein einfaches Unterscheidungsverfahren für pythagoreische Zahlentripel gegeben.

Das hierarchische Ordnungsprinzip für die ersten 12 Intervalle, die sich aus den Zahlenpaaren und pythagoreischen Zahlentripeln innerhalb eines Oktavenraums mathematisch ableiten lassen, führt somit zu der folgenden Reihe:

1/1	Prim	als Grenzintervalle
1/2	Oktave	des Oktavenraums
2/3	Quinte	
3/4	Quarte	
3/5	große Sexte	
4/5	große Terz	
4/7	Naturseptime	
5/6	kleine Terz	
5/7	Tritonus	
5/8	kleine Sexte	
6/7	septimale Kleinterz	
5/9	kleine Septime	
↓		

Der Anfang einer solchen hierarchischen Ordnung wird zunächst durch die Grenzintervalle des Oktavenraums – Prim und Oktave – gebildet, da diese, wie ausführlich dargestellt, keinen pythagoreischen Zahlen zugeordnet werden können und damit unter allen Intervallen eine Sonderstellung einnehmen. Es folgen die beiden komplementären Intervalle der Quinte 2/3 und der Quarte 3/4, die im ersten pythagoreischen Dreieck 3–4–5 ihren Ursprung haben. Diese begründen damit den eigentlichen Anfang der harmonikalen Rangordnung, sowohl für die pythagoreischen Zahlen als auch für die Intervalle.

Die Bedeutung der pythagoreischen Zahlen wird besonders dadurch unterstrichen, daß sie nicht nur eine Brücke schlagen zwischen so weit auseinanderliegenden Bereichen wie beispielsweise den Kristallen, den Spektrallinien und den Tönen, sondern auch die Grundlage bilden für den Nachweis weiterer harmonikaler Ordnungssysteme in anderen Bereichen der Natur.



MUSIKALISCHE GEOMETRIE

Die Untersuchung der pythagoreischen Zahlen innerhalb eines harmonikal strukturierten Raumes läßt sich besonders auf den musikalischen Bereich übertragen. Dies ergibt sich nicht nur aus den Intervallbezeichnungen, die bekanntlich aus der Musiktheorie stammen, sondern auch daraus, daß die Komplementarität der Intervalle den harmonikalen Hintergrund bildet für die Idee einer *Harmonie der Gegensätze,* der Gegensätze, die sich aus einer Einheit ableiten oder zu dieser zusammenfügen lassen. Es muß deshalb kurz der Bedeutung des Begriffes *Harmonie* nachgegangen werden, zumal gerade dieser Begriff für das Verständnis der gesamten Thematik von *Harmonie und Komplementarität* wichtig ist.

Man versteht heute allgemein unter *Harmonie* (von griech. *harmonia* „Eintracht") die Wohlgeordnetheit, den Zusammenklang, auch als Grundprinzip einer allgemeinen Weltordnung[1]. In der ursprünglichen antiken Bedeutung des Wortes *harmonia,* das aus einer indogermanischen Stammsilbe *ar* oder *har* hervorgegangen sein soll, verstand man darunter jedoch „die Vereinigung von Entgegengesetztem oder Verschiedenartigem zu einem geordneten Ganzen"[2]. Unter *harmonia* wurde also nicht das gute Einvernehmen von Gleichartigem, Gleichgesinntem verstanden, sondern die Zusammenfügung von Andersartigem, Auseinanderstrebendem[3]. Das Verständnis des Begriffes *Harmonie* in der heutigen Interpretation hat sich also von der ursprünglichen Bedeutung weit entfernt.

Der geschichtliche Hintergrund des Wortes *harmonia* ist wesentlich älter als der der *Komplementarität.* Das von lat. *complementum* „Ergänzung" gebildete Wort ist erstmals im 15. Jahrhundert bei PEURBACH und REGIOMONTANUS nachweisbar. Es war aber damals so geläufig, daß man auf einen älteren Ursprung schließen muß[4].

1) Brockhaus Enzyklopädie, Band 8, Wiesbaden 1969, Artikel *Harmonie.*
2) H. Hüschen, Artikel *Harmonie*, in: Musik in Geschichte und Gegenwart 5, 1956, 1588ff; ders., Der Harmoniebegriff im Mittelalter, in: Studium Generale 19, 1966, 548ff.
3) M. Vogel, Harmonia und Mousikē im griechischen Altertum, ebenda 533-538.
4) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Band 4, 1932², 51f.

Der Begriff der Komplementarität allein hätte hier nicht genügt, da auch zwei irrationale Teile ein Ganzes bilden können, wie dies am Beispiel des geometrischen Mittels $\sqrt{2}$, des Teilungspunktes des Oktavenraumes, schon demonstriert wurde, was aber auch für andere „temperierte" Intervallpaare gilt.

harmonikal komplementär	3/2	$\otimes$	4/3	=	2/1
	Quinte	$\otimes$	Quarte	=	Oktave
temperiert komplementär	$(\sqrt[12]{2})^7$	$\otimes$	$(\sqrt[12]{2})^5$	=	2/1

Es wurde schon erwähnt, daß nur rationale rechtwinklige Dreiecke in – ebenfalls rationale – Intervalle umgewandelt werden können. Die Harmonie setzt gleichsam diese Rationalität der Intervalle voraus, wie sie bekanntlich in der Musiktheorie nur in der *Reinen Stimmung* vorliegt. Die inhaltliche Bedeutung der Harmonie geht damit wesentlich über den Begriff der Komplementarität hinaus. Die beiden reinen Intervalle Quinte 2/3 und Quarte 3/4 stellen über das pythagoreische Dreieck 3–4–5 das erste gegensätzliche Paar dar, das aus der Ganzheit des Oktavenraums hervorgegangen ist.

Eine Morphologie der Musik läßt sich theoretisch durchaus an stereometrischen *Tonkörpern* entwickeln, die sich auf einen ihnen entsprechenden akustischen *Tonraum* beziehen lassen. Sie geht dabei von einem *idealen Tonraum* aus und überträgt die einzelnen harmonikalen Ergebnisse auf den *realen Tonraum* der schwingenden Saiten (bei Saiteninstrumenten) oder schwingenden Luftsäulen (bei Blasinstrumenten). Ein Musikinstrument hat nicht den gleichen idealen stereometrischen Hintergrund eines Tonkörpers wie die (kubischen) Kristalle. Die Schwingungsformen der von einem Bogen angestrichenen Saiten entsprechen z. B. dreieckförmigen Kippschwingungen und sind schon von daher nur bedingt mit idealen Schwingungsformen vergleichbar. Bei den Blasinstrumenten ist es nicht anders. Doch geht jede Theorie von bestimmten vereinfachten und idealen Voraussetzungen aus und versucht, diese mit den realen Gegebenheiten in Einklang zu bringen.

Unter der Vielzahl der regelmäßigen und unregelmäßigen Bewegungsvorgänge fallen besonders die Schwingungserscheinungen auf. Ihr Kennzeichen ist die periodische Wiederkehr eines bestimmten Kurvenverlaufs. Die Schwingung als Naturvorgang ist für die Naturerkenntnis von besonderer Bedeutung. Es lassen sich nämlich nicht nur periodische Vorgänge jeder beliebigen Form, sondern auch vollkommen unperiodische Abläufe so auffassen, als wären sie durch das Zusammenwirken von einfachen Schwingungen entstanden. Zudem lassen sich bei jedem Vergleich zweier einfacher periodischer Schwingungszüge (mit Ausnahme der Prim und der Oktave) die drei Zahlenebenen: Zahlenpaare, pythagoreische Zahlentripel und Intervalle, nachweisen. Dabei ist es gleich, ob

von dem Schwingungsverlauf eines akustischen oder eines optischen Intervalls ausgegangen wird. Man vergleiche im Anhang (236) das Beispiel der Quinte 2:3.

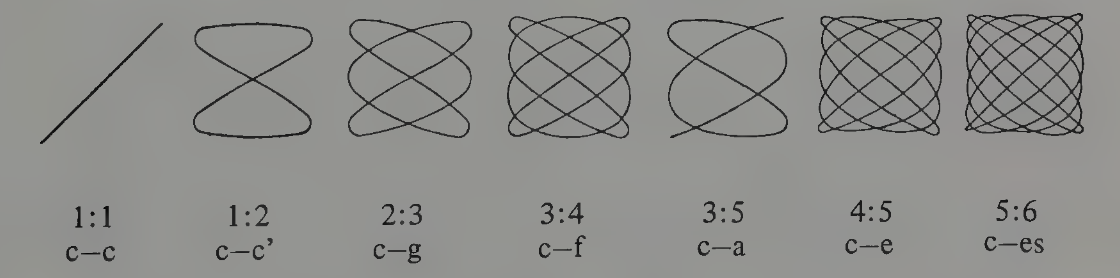
Die drei Zahlenebenen finden sich auch bei so typischen geometrischen Figuren wie Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, bei denen sie ebenfalls zu neuartigen harmonikalen Ergebnissen führen, die hier jedoch nicht weiter behandelt werden können.

Darüber hinaus läßt sich der Schwingungsvorgang eines Intervalls mit der Darstellung der LISSAJOUSschen Figuren verbinden, wobei sich interessante harmonikale Zusammenhänge ergeben. Die Lissajous-Figuren stellen Überlagerungsfiguren dar, die durch das Zusammenwirken von zwei Schwingungen verschiedener Richtung zustande kommen. Besonders interessant ist der Fall, wenn die beiden Schwingungen senkrecht zueinander erfolgen. Dabei ergeben sich nur dann geschlossene Figuren, wenn die Schwingungen zueinander in einem *rationalen* Verhältnis stehen. Durch derartige Figuren ist es möglich, Intervalle in einer zweidimensionalen Form darzustellen und die hörbare dreidimensionale Form mit der sichtbaren zweidimensionalen Form eines Intervalls über die entsprechenden Winkel harmonikal zu vergleichen.

Die Winkel in den Knotenpunkten der Lissajous-Figuren innerhalb des zweidimensionalen rechtwinkligen Achsenkreuzes entsprechen dem Teilungsverhältnis des Kreises. Gerade durch die geometrischen Möglichkeiten der harmonischen Synthese und der Lissajous-Figuren kommen bei gleichen Intervallen neue Winkelelemente hinzu. Diese Winkel zeigen sich nur in der zweidimensionalen Ebene und dürfen nicht verwechselt werden mit den Winkeln der pythagoreischen Dreiecke in den kubischen Körperformen (236).

Die Lissajous-Figuren stellen damit ein ausgezeichnetes optisches Mittel dar, das Wesen der Intervalle über die einfachen bis komplizierter aufgebauten rationalen Zahlenverhältnisse zu erfassen. Sie mögen hier als Beispiel dafür dienen, daß musikalische Intervalle auf der zweidimensionalen Ebene eines Oszillographen sichtbar gemacht werden können.

Bei gleicher Phasenlage ergeben sich für die ersten Intervalle die folgenden Lissajous-Figuren[1]:



1) H. Backhaus, Theorie akustischer Schwingungen, in: Handbuch der Physik, Band 8, Berlin 1927, 26-30.

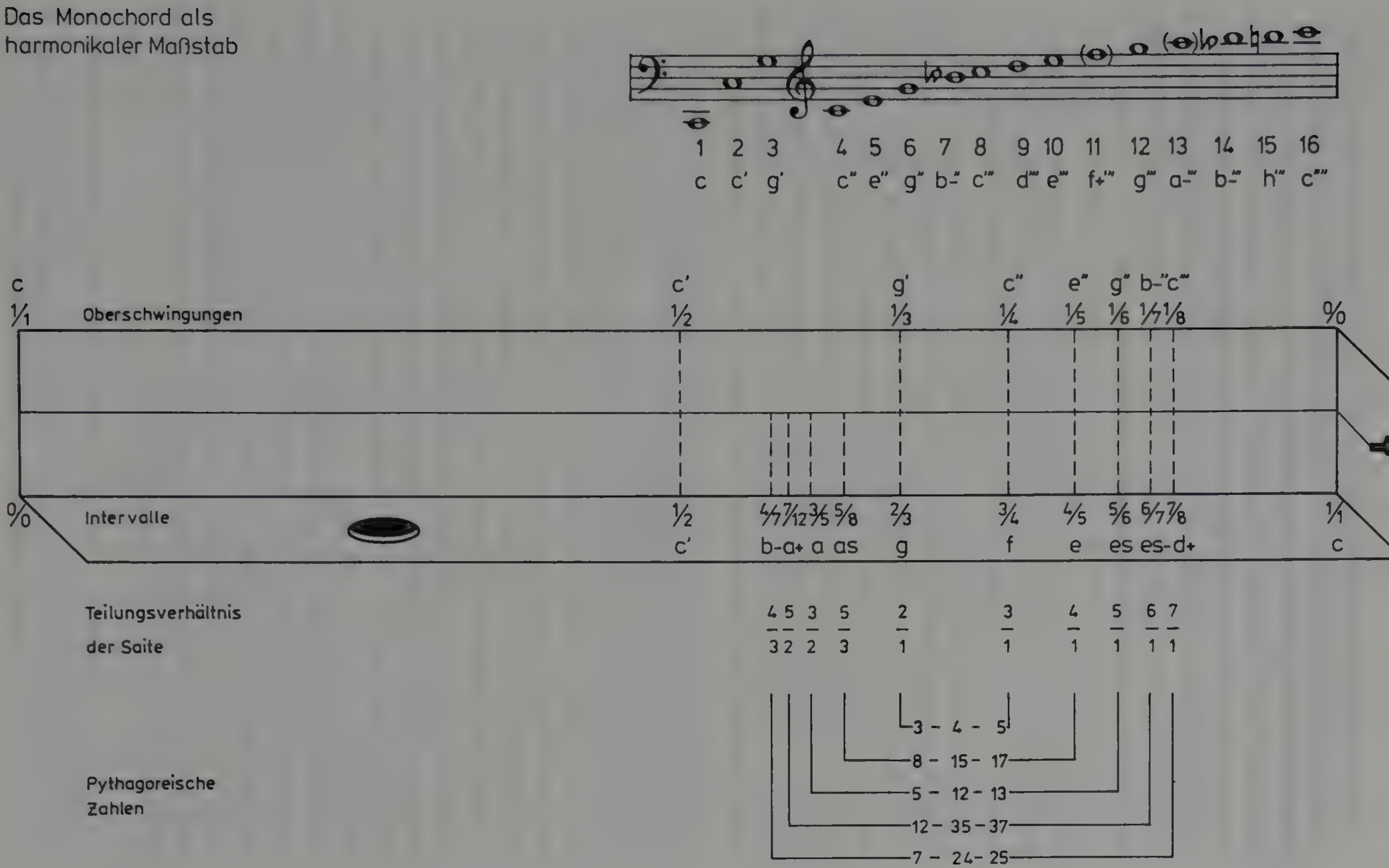
Die scheinbar offene Form bei den Intervallen 1:1 und 3:5 erklärt sich daraus, daß sie in ihrem Verhältnis nicht die Zahl 2 enthalten.

Aus der vorliegenden harmonikalen Untersuchung ergibt sich die Möglichkeit, auf mathematischem Weg direkt in das räumliche Strukturprinzip der Intervalle und über ihre entsprechenden Zusammensetzungen auch der Akkorde einzudringen, indem diese über die pythagoreischen Zahlen und ihre Zuordnung auf das Achsenkreuz in die Dreidimensionalität übertragen werden. Die komplementären Intervalle sind das Ursprüngliche, auf dem erst sich eine musikalische Geometrie aufbauen läßt. Durch die mathematische Verbindung der drei Zahlenebenen: Zahlenpaare, pythagoreische Zahlen und Intervalle, wird eine Tür geöffnet zu einem Tonraum, der es erlaubt, musiktheoretische Zusammenhänge auf neuartige Weise zu interpretieren.

Alle Intervalle lassen sich innerhalb eines harmonikal-komplementären Ordnungsschemas einordnen und auf ein Toninstrument wie z. B. das Monochord übertragen. Ein solches akustisches Meßinstrument bietet durch seinen schlichten Aufbau die günstigste Voraussetzung, die einzelnen Intervalle, Tonzahlen und Obertöne akustisch zu überprüfen, indem die Idee des Oktavenraums auf die *Eine Saite* des Monochords transformiert wird.

Die gegenüber stehende Abbildung zeigt im oberen Teil die Töne der Obertonreihe, sowohl mit ihren Schwingungszahlen als auch mit den entsprechenden Saitenlängen. Die ganze Saite wird als Einheit 1/1 gesetzt, wobei sich das Obertonprinzip einer sich immer mehr verengenden Reihe von Tönen ergibt.

Der untere Teil der Abbildung zeigt dagegen die komplementären Intervalle der Oktavenreihe in ihrem harmonikalen Zusammenhang mit den pythagoreischen Zahlentripeln und den Teilungsverhältnissen der ganzen Saite 1/1.


Das Monochord als
harmonikaler Maßstab
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
c c' g' c'' e'' g'' b-'' c''' d''' e''' f+''' g''' a-''' b-''' h''' c''''
c c' g' c'' e'' g'' b-'' c'''
1/1 Oberschwingungen 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 0/0
0/0 Intervalle 1/2 4/7 7/12 3/5 5/8 2/3 3/4 4/5 5/6 6/7 7/8 1/1
c' b-a+ a as g f e es es-d+ c
Teilungsverhältnis
der Saite
4/3 5/2 3/2 5/3 2/1 3/1 4/1 5/1 6/1 7/1
Pythagoreische
Zahlen
3 - 4 - 5
8 - 15 - 17
5 - 12 - 13
12 - 35 - 37
7 - 24 - 25

In diesem Kapitel „Musikalische Geometrie" wird versucht, einige grundlegende Erkenntnisse, die sich als wesentliche Bestandteile der Harmonikalen Stereometrie herausstellten, in den musikalisch-akustischen Bereich zu übertragen. Die Schwierigkeiten, die sich dabei ergeben, liegen vor allem darin, daß hier stereometrische Zusammenhänge in einen Bereich transponiert werden, der einer anderen Dimension, z. B. einer Saite, angehört. Andererseits werden musikalische Intervalle zur Beschreibung von Strukturen und Ordnungsprinzipien in Kristallen und Spektrallinien herangezogen. obwohl solche Bezeichnungen in den speziell naturwissenschaftlichen Bereichen nicht üblich sind. Aus diesem Grund wird hier die Übertragung auf die musikalische Akustik gewählt, da es so eher möglich ist, die harmonikalen Zusammenhänge der g a n z e n Z a h l e n in den einzelnen Zahlenebenen transparent zu machen.

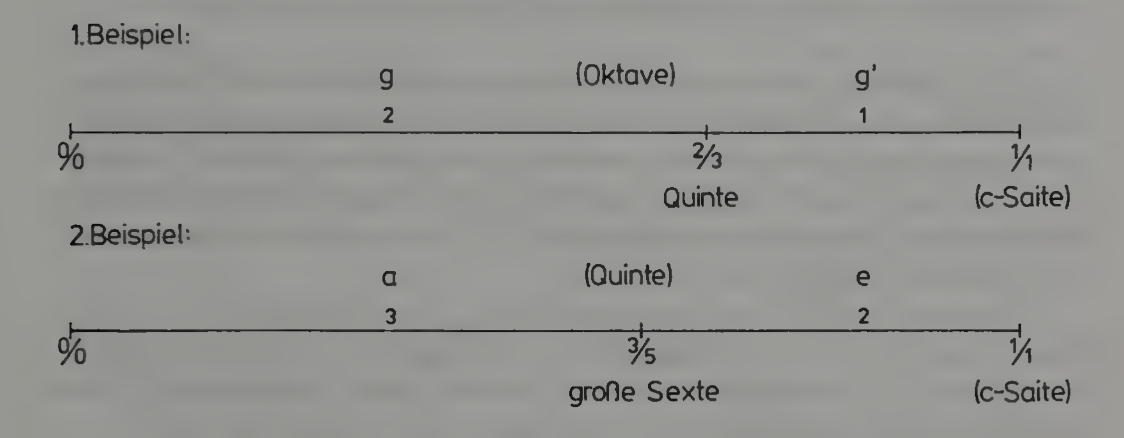
Es gibt ohnehin verschiedene Geometrien: eine euklidische, eine nichteuklidische, eine projektive, eine hyperbolische und eine höherdimensionale Geometrie. Ihnen wird eine von der Natur geprägte musikalische Geometrie[1] hinzugefügt. Wie dies schon ausführlich gezeigt werden konnte, hat sie einen konkreten harmonikalen Hintergrund. Die musikalische Geometrie hat aber nur da einen Sinn, wo in den Intervallen von rationalen Zahlenverhältnissen ausgegangen wird, wie dies innerhalb der Musiktheorie für die Reine Stimmung gilt. Temperierte Intervalle und Akkorde lassen sich nur in Ausnahmen geometrisch konstruieren[2]. Dies ist mit der Grund, daß relativ selten geometrische Darstellungen in der Musiktheorie oder auch umgekehrt musiktheoretische Zusammenhänge in der Geometrie anzutreffen sind.

Die musikalische Geometrie bleibt, auch wenn man sie auf die schwingende Saite überträgt, in erster Linie immer ein räumliches Strukturphänomen. Sie geht damit von der Dreidimensionalität aus, obwohl sie in einem Intervall auf das Längenverhältnis zweier gleichzeitig schwingenden Saiten beschränkt ist.

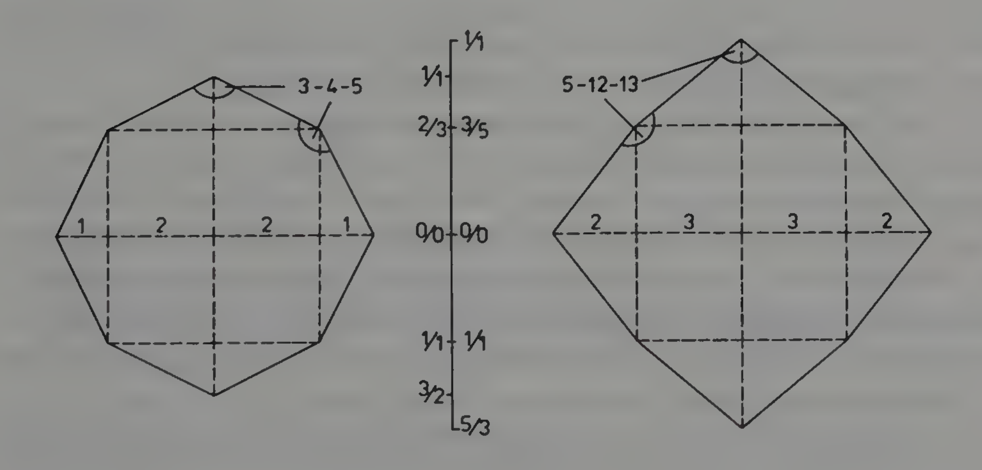
Durch die Hinzunahme weiterer Zahlenelemente wie der Zahlenpaare und der pythagoreischen Zahlentripel wird der mathematisch-harmonikale Zusammenhang scheinbar erschwert. In Wirklichkeit bilden diese drei Zahlenebenen eine strukturelle und in sich geschlossene Einheit. Sie sind es, die den eigentlichen Hintergrund für die musikalische Geometrie bilden. Dadurch wird auch verständlich, warum man das pythagoreische Dreieck 3–4–5 harmonikal nicht einfach über die Zahlen 3, 4 und 5 interpretieren kann, wie dies gerade in der harmonikalen Literatur häufig anzutreffen ist. So kann man auch die Zahlenpaare, z. B. (2/1), (3/1), obwohl sie ein Längenverhältnis auf der schwingenden Saite darstellen, nicht ohne weiteres als Intervalle bezeichnen, ohne diesen Gesamtzusammenhang zu berücksichtigen.

1) Vgl. dazu W. Harburger, Musikalische Geometrie, in: Zeitschrift für Musikwissenschaft 11, 1929, 193-211.
2) E. Günther, Mathematische Betrachtungen zur diatonischen und temperierten Tonleiter, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 55, 1924, 22-29.

Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen. Die Teilung der schwingenden c–Saite im Verhältnis 2:1 führt zum Intervall der Quinte 2/3, so wie analog beim Teilungsverhältnis 2:3 das Intervall der großen Sexte 3/5 entsteht. Im ersten Fall bilden die entstehenden Saitenabschnitte die Töne g und g' und damit eine Oktave, im zweiten Fall bilden die Töne a und e eine Quinte, doch nur im Verhältnis zueinander und nicht im Verhältnis zum Grundton der ganzen Saite.



Durch die stereometrische Übertragung auf das rechtwinklige Achsenkreuz eines Tonraumes ist es möglich, die hier auftretenden Zahlen entsprechend harmonikal einzuordnen, wobei über die Winkelfunktionen die zugehörigen pythagoreischen Dreiecke zur Geltung kommen.



Eine solche *Klangfigur* stellt einen zweidimensionalen Schnitt durch die Achsenebene eines begrenzten räumlichen Gebildes von stehenden Wellen dar. Man muß diesen harmonikalen Hintergrund unbedingt berücksichtigen, wenn man die ganzen Zahlen, wie sie in den Indizes der Kristalle, den Linienspektren der Atome oder auch im musikalischen Bereich vorkommen, in einen größeren Zusammenhang stellen will. Nur so lassen sich einerseits die Zahlen in den Kristallindizes als Intervalle interpretieren, wie es andererseits möglich ist, musikalisch-akustische Gesetzmäßigkeiten in eine direkte Beziehung mit den pythagoreischen Zahlen in den Linienspektren des Wasserstoffatoms zu bringen.

Aus der Vielzahl der Möglichkeiten, geometrische Inhalte harmonikal zu interpretieren, wäre vor allem die *Harmonische Teilung* zu nennen. Sie spielte insbesondere bei der harmonikalen Interpretation der Spektrallinien des Wasserstoffatoms eine wesentliche Rolle, weshalb es notwendig ist, ausführlicher auf sie einzugehen. Darüber hinaus findet sie sich in der angewandten Mathematik, wie z. B. in der Optik und in der Akustik.

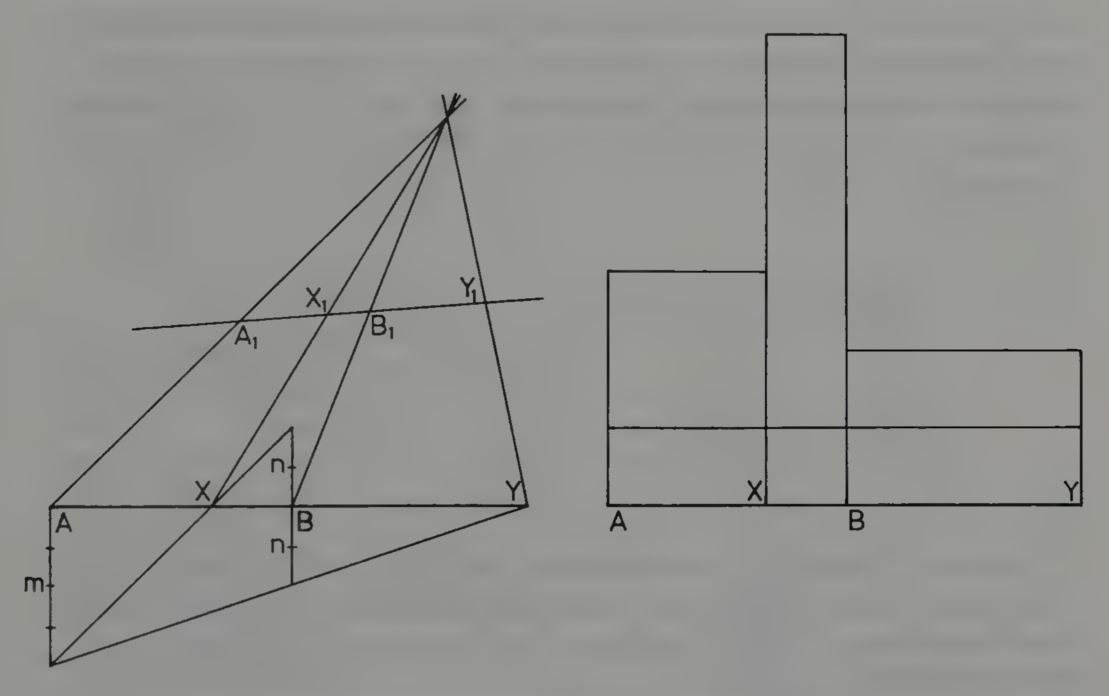
Sie wird geschichtlich schon wegen der Bezeichnung *harmonisch* auf PYTHAGORAS (um 530 v. Chr.) und seine Schüler zurückgeführt und meist auch in eine Beziehung zur Musiklehre gebracht. Die harmonische Teilung einer Strecke in einen inneren und äußeren Teilungsabschnitt wird allerdings erst durch APOLLONIUS von Perge (um 200 v. Chr.) und PAPPUS (um 300 n. Chr.) belegt[1]. Apollonius benutzt dabei noch nicht das Wort *harmonische Teilung,* sondern schreibt den Satz als Proportion[2]. Die harmonische Teilung läßt sich jedoch auch mit den drei Mittelbildungen: harmonisches, geometrisches und arithmetisches Mittel, verbinden, die geschichtlich älter sind und erstmals von ARCHYTAS von Tarent (um 330 v. Chr.) erwähnt werden[3]. Auch Begriffe wie *harmonisches Doppelverhältnis, harmonische Proportion, harmonische Punktepaare, Harmonikale* u. ä. gehören zur harmonischen Teilung und bilden heute die Grundlage der Maßbeziehung der Projektiven Geometrie.

Da die harmonische Teilung im Kapitel der Spektrallinien (144) schon vorgestellt wurde, kommt es hier mehr darauf an, zusätzliche Aspekte zu behandeln und vor allem ihre geometrischen Inhalte auf die schwingende Saite eines Monochords zu übertragen. Indem bestimmte Zahlenverhältnisse harmonikal als Tonzahlen oder Intervalle interpretiert werden können, ist eine konkrete Aussage möglich. Es hat den Anschein, als müßte eine solche harmonikale Interpretation sehr einfach sein. Vergleicht man jedoch die hierfür in Frage kom-

1) Apollonius von Perge, Conica, III 37, Pappus, Werke, VII 161; R. Baltzer, Elemente der Mathematik, Band 1/2, Leipzig 1872, 383; J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Band 4, Berlin 1923[3], 158 und 178.
2) M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Band 1, 1907, 338.
3) Archytas, frg. B 2; H. Diels/W. Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker, Zürich–Berlin 1964[11], I 435f.

mende Literatur, so stellt man fest, daß im allgemeinen die bisherigen Erklärungsversuche nicht befriedigen können. In beiden Fachbereichen: Mathematik und Musiktheorie/Harmonik, ist man völlig unkritisch in der Interpretation dieses geometrisch-harmonikalen Sachverhaltes. Dies ist umso erstaunlicher, als es sich hier um eine sehr alte Thematik handelt, die schon wegen des geschichtlichen Hintergrundes mehr Aufmerksamkeit verdient hätte.

Das Grundprinzip der harmonischen Teilung besteht darin, daß eine Strecke AB innen durch den Punkt X und außen durch den Punkt Y so geteilt wird, daß das jeweilige Teilungsverhältnis in einer bestimmten inneren Ordnung der Einzelverhältnisse steht. Diese Eigenschaft nimmt LA HIRE[1] zur Grundlage seiner Definition: *Eine Linie heißt harmonisch geteilt, wenn die ganze Linie zu einem der äußeren Abschnitte sich verhält, wie der andere äußere zum mittleren, oder wenn das Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Abschnitt gleich ist dem Rechteck aus den beiden äußeren Abschnitten.*



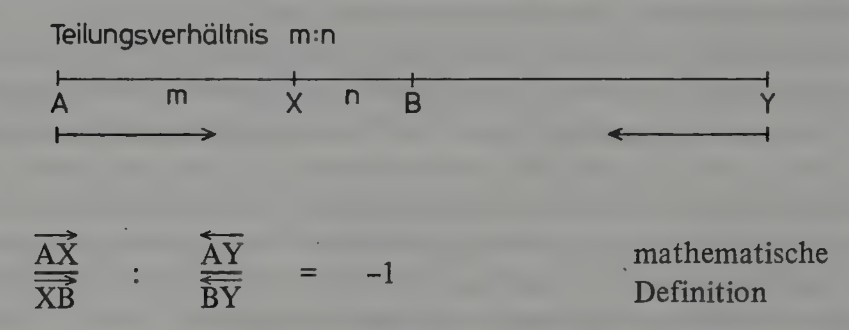
Hier liegt eine Definition der harmonischen Teilung vor, die sowohl für die erste als auch für die zweite Dimension gilt.

Im folgenden soll nun eine Ausweitung auf die dritte Dimension des Tonraums vorgenommen werden. Wird also eine Strecke AB innen und außen im gleichen Verhältnis m:n geteilt, so ist sie harmonisch geteilt. Mathematisch bedeutet dies, daß die vier harmonischen Punkte das Doppelverhältnis

$$(A, B; X, Y) = -1$$

1) La Hire, Sectiones conicae, Paris 1685; C. Adams, Die harmonischen Verhältnisse, Winterthur 1845, 2.

bilden und daß die beiden Punktepaare A, B und X, Y sich gegenseitig bedingen. Entsprechend wird auch die Strecke XY durch die Punkte A und B harmonisch geteilt. AB heißt das harmonische Mittel zwischen AX und AY, wie umgekehrt XY das harmonische Mittel zwischen BY und AY ist.



$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} : \frac{\overleftarrow{AY}}{\overleftarrow{BY}} = -1$$

Das gegensätzliche Prinzip, das durch die Richtungspfeile ausgedrückt ist, wird durch das negative Ergebnis (-1) erkennbar. Dies ist von wesentlicher Bedeutung auch für eine harmonikale Interpretation und führt dort über die komplementären Intervalle, die sich zur Oktave ergänzen, direkt zu einer *Harmonie der Gegensätze.*

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{AB}} \otimes \frac{\overleftarrow{BY}}{\overleftarrow{XY}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AX}} \otimes \frac{\overleftarrow{XY}}{\overleftarrow{BY}} = \frac{2}{1}$$

harmonikale Definition

Geben wir an zwei konkreten Beispielen ein Bild der heute allgemein üblichen Interpretation der harmonischen Streckenteilung, soweit sie auf musikalische Inhalte eingeht, so wird der Unterschied zur vorliegenden Auslegung besonders deutlich.

1. Beispiel: *Das Wort harmonisch ist aus der Musiktheorie übernommen. Gibt AY als gespannte Saite den Grundton, BY die Quinte, so bildet XY die große Terz – diese drei aber setzen den harmonischen Grundakkord zusammen*[1].

1) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Band 4: Geometrie, Berlin 1923^2, 158, 178; 1940^3, 235.

c	e	g		⟵
3	2	10		
A	X	B		Y
1/1	4/5	2/3		%

$\overleftarrow{AY} = 1/1$ Grundton c

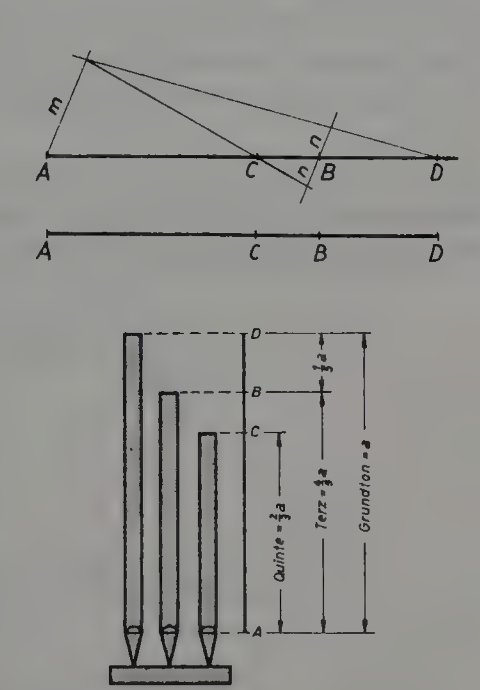
$\overleftarrow{XY} = 4/5$ große Terz e Dur-Dreiklang

$\overleftarrow{BY} = 2/3$ Quinte g

Diese Interpretation der harmonischen Teilung geht auf GREGORIUS von St. Vincentius zurück, der sie in seinem Opus geometricum von 1647 beschrieb[1].

2. Beispiel[2]:

> **Harmonische Teilung.** Wird eine Strecke $\overline{AB}$ innen und außen im gleichen Verhältnis $(m : n)$ geteilt, so sagt man, sie wird harmonisch geteilt. Die Punkte A, B, C und D heißen harmonische Punkte. Es ist dann
>
> $$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{DA} : \overline{DB} = m : n$$
>
> Die Bezeichnung „harmonische Punkte" stammt von Pythagoras und rührt davon her, daß drei gleichartige und gleich stark gespannte Saiten, deren Längen der harmonischen Teilung entsprechen, eine Konsonanz (einen Wohlklang) ergeben. Das gleiche gilt auch bei den Luftsäulen der Orgelpfeifen. Terz und Quinte bilden zusammen mit dem Grundton eine gute Konsonanz; auf diesem Dreiklang baut die gesamte Harmonielehre auf.
>
> $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{DA} : \overline{DB} = 5 : 1$
>
> $\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{CB} : \overline{BD} = 2 : 3$



Es muß gerade wegen dieser beiden Beispiele darauf hingewiesen werden, daß der Durdreiklang keinesfalls in dieser Form morphologisch abgeleitet werden kann, sondern sich nur aus den entsprechenden Intervallen zusammensetzen läßt. Außerdem läßt sich der entsprechende Molldreiklang nicht aus der harmo-

1) Siehe Anmerkung 1 auf Seite 186.

2) L. Kusch, Mathematik für Schule und Beruf, Band 2: Geometrie, Essen 1978[10], 124. Weitere Literatur: W. Lietzmann, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie, Leipzig 1927[4], 129; Brockhaus Enzyklopädie, Band 8, Wiesbaden 1969, 182.

nischen Teilung aufbauen. Somit wird deutlich, daß es sich hier um ein rein zufälliges Ergebnis handelt.

Es ist kaum verständlich, daß man sich bei einer harmonikalen Interpretation nicht an die in der Mathematik vorgegebene Definition hält. Geht man nämlich von zwei entgegengesetzten Richtungen aus, wie es die mathematische Formel verlangt, liefern die beiden angeführten Beispiele bei gleichen Streckenabschnitten vollkommen andere Intervallwerte, nämlich die große Sext 3/5 und die kleine Terz 5/6, die sich zur Oktave ergänzen. Die Einheit (-1), die sich mathematisch aus der harmonischen Proportion ergibt, führt harmonikal zur Zweiheit der Oktave oder besser zu den beiden Grenzpunkten des Oktavenraums.

(5/4) 1/1 5/6 0/6
c es ←
A X B Y
0/5 3/5 1/1 (3/1)
→ a c'

$$\overleftarrow{XY} = 1/1 = c$$

$$\overrightarrow{AB} = 1/1 = c$$

Die Intervallwerte, die der inneren Teilung entsprechen, sind entscheidend für die harmonikale Bewertung.

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{AB}} \otimes \frac{\overleftarrow{BY}}{\overleftarrow{XY}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{5} \otimes \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$

oder in der reziproken Form

$$\frac{5}{3} \otimes \frac{6}{5} = \frac{2}{1}$$

Mit einer derartigen Interpretation ist ein neuartiger harmonikaler Inhalt verbunden, der sich prinzipiell auf jedes rationale Teilungsverhältnis z. B. einer Saite anwenden läßt.

In der Musiktheorie wird unter dem Stichwort *Harmonische Teilung* meist nur die *Harmonische Mittelbildung* beschrieben. Die geometrische Behandlung der harmonischen Streckenteilung ist hier fast eine Rarität, obwohl diese und die harmonische Mittelbildung aufs engste miteinander verbunden sind. So

konnte nur in wenigen musiktheoretischen oder harmonikalen Werken die harmonische Streckenteilung nachgewiesen werden[1]. Man setzt allgemein die Strecke AY als Grundton an und interpretiert einseitig von einem äußeren harmonischen Punkt aus. Das gegensätzliche Prinzip, wie es in dem mathematischen Ausdruck

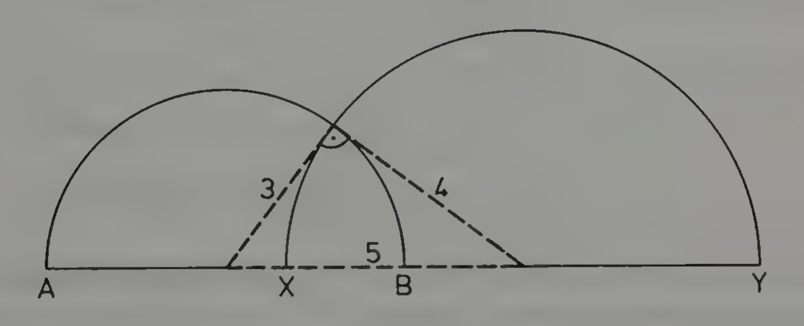
$$(\overrightarrow{AB}; \overleftarrow{XY}) = -1$$

zum Ausdruck kommt, wird auch hier überhaupt nicht berücksichtigt.

Das übergeordnete Prinzip, dem die harmonische Teilung und ihre harmonikale Interpretation unterliegen, wird durch das Teilungsverhältnis m:n des Zahlenpaares und die pythagoreischen Zahlen bestimmt, obwohl letztere nicht direkt in Erscheinung treten.

In jeder harmonisch geteilten Linie ist die Summe der Quadrate der Distanzen beider zugeordneten Punkten-Paare gleich dem Quadrat der Summe der beiden äußeren Abschnitte, d. h. $AB^2 + XY^2 = (AX + BY)^2$. Diese Definition von C. ADAMS[2] in seinem ausgezeichneten Buch „Die harmonischen Verhältnisse“ stellt die Verbindung her zwischen der *Harmonischen Teilung* und den *Pythagoreischen Zahlen,* jedoch ohne ihre harmonikale Umwandlung in komplementäre Intervalle vorzunehmen.

Der strukturelle Zusammenhang von Zahlenpaaren, pythagoreischen Zahlen und komplementären Intervallen innerhalb der harmonischen Teilung und den vier harmonischen Punkten läßt sich am Beispiel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 auf einfache Weise darstellen.



1. Zahlenpaar: $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{XB} = 2 : 1$

2. Zahlenpaar: $\overleftarrow{BY} : \overleftarrow{BX} = 3 : 1$

1) H. Husmann, Einführung in die Musikwissenschaft, Wilhelmshaven 1975, 122; E. Bindel, Zahlengrundlagen der Musik, 3. Teil, Stuttgart 1953, 63ff, 81ff; H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 79ff; H. Atteln, Das Verhältnis Musik – Mathematik bei Johannes Kepler. Ein Beitrag zur Musiktheorie des frühen 17. Jahrhunderts, Erlangen-Nürnberg, 1970.
2) C. Adams, Die harmonikalen Verhältnisse, Winterthur 1845, 8.

pythagoreische Zahlen: $(\tfrac{1}{2}AB)^2 + (\tfrac{1}{2}XY)^2 = (\tfrac{1}{2}AX + \tfrac{1}{2}BY)^2$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

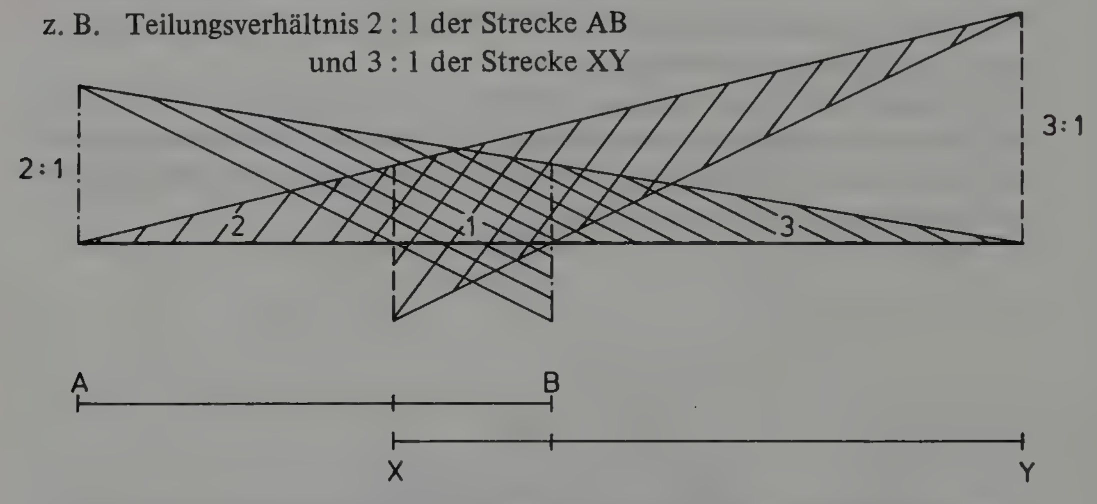
komplementäre Intervalle: $\dfrac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{AB}} \otimes \dfrac{\overleftarrow{BY}}{\overleftarrow{XY}} = \dfrac{1}{2}$

Quinte $\otimes$ Quarte = Oktave

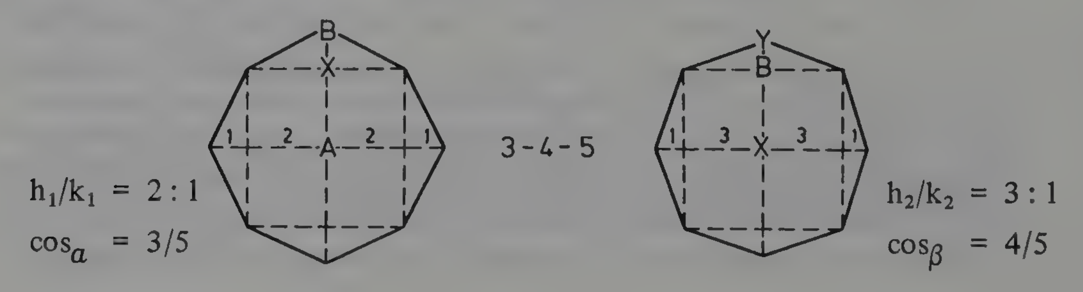
$2/3 \otimes 3/4 = 1/2$

Die Streckenabschnitte, die von den vier harmonischen Punkten A, B, X, Y gebildet werden, sind am ehesten über die Komplementarität zu verstehen. Es sind immer zwei verschiedene Teilungsverhältnisse oder Zahlenpaare, die zusammen die gleichen Streckenabschnitte und auch die gleichen harmonischen Punkte bilden.

z. B. Teilungsverhältnis 2 : 1 der Strecke AB
und 3 : 1 der Strecke XY

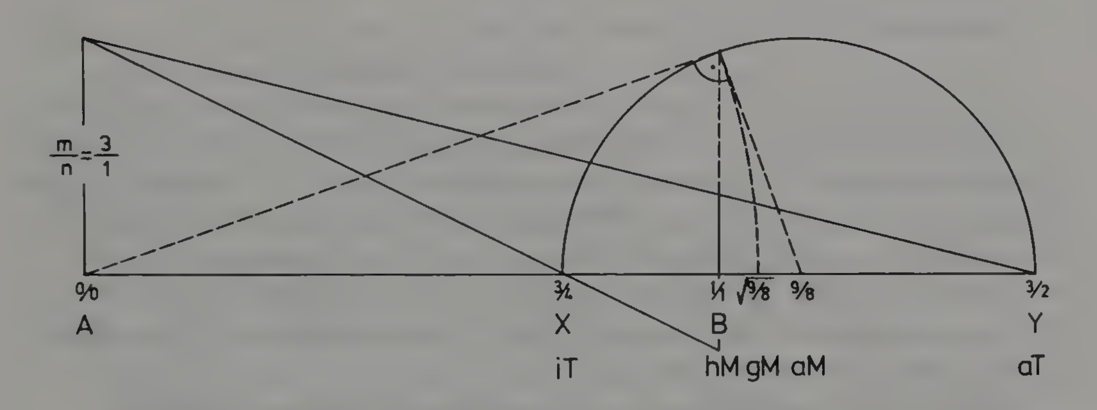


Die drei Streckenabschnitte der harmonischen Teilung enthalten in ihrem Verhältnis zueinander die gleichen Zahlenpaare wie die Pyramidenwürfel [hk0] in ihren Kristallindizes. Am Beispiel der beiden Pyramidenwürfel [210] und [310] läßt sich so die Komplementarität in der harmonischen Teilung direkt am Achsenkreuz nachweisen.



Im ersten Fall des Pyramidenwürfels [210] wird der innere Teilungspunkt der Achsenstrecke AB durch den Schnittpunkt X des Würfels gebildet, während sich analog beim komplementären Pyramidenwürfel [310] der Teilungspunkt B der Strecke XY ergibt. Beide lassen sich so auch über die harmonische Teilung als eine komplementäre Einheit auffassen und in einen stereometrischen Zusammenhang bringen.

Die harmonische Teilung läßt sich noch mit dem arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel verbinden. Dies spielte bei der harmonikalen Interpretation und geometrischen Darstellung der Spektrallinien des Wasserstoffatoms eine besondere Rolle und wird hier noch einmal in einer Skizze vorgestellt.



A,B und X,Y als harmonische Punkte, entsprechend der harmonischen Teilung:

m : n   Teilungsverhältnis einer Strecke AB = 1

iT   innere Teilung (AX): $\frac{m}{m+n}$

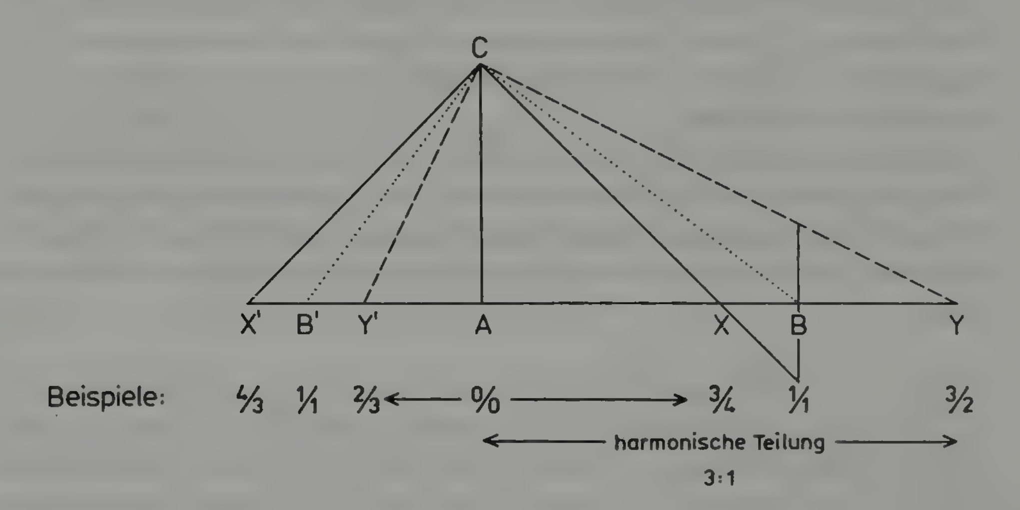
aT   äußere Teilung (AY): $\frac{m}{m-n}$

hM   harmonisches Mittel von AX und AY: $2 \cdot \frac{AX \cdot AY}{AX + AY}$

gM   geometrisches Mittel von AX und AY: $\sqrt{AX \cdot AY}$

aM   arithmetisches Mittel von AX und AY: $\frac{AX + AY}{2}$

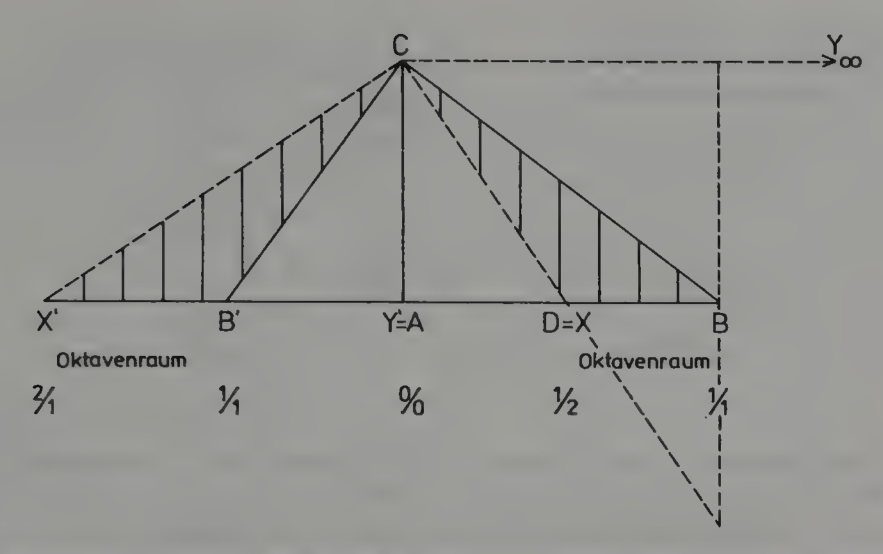
Man kann die harmonische Teilung auch zur geometrischen Darstellung der Reziprozität der inneren und äußeren Zahlenverhältnisse heranziehen.



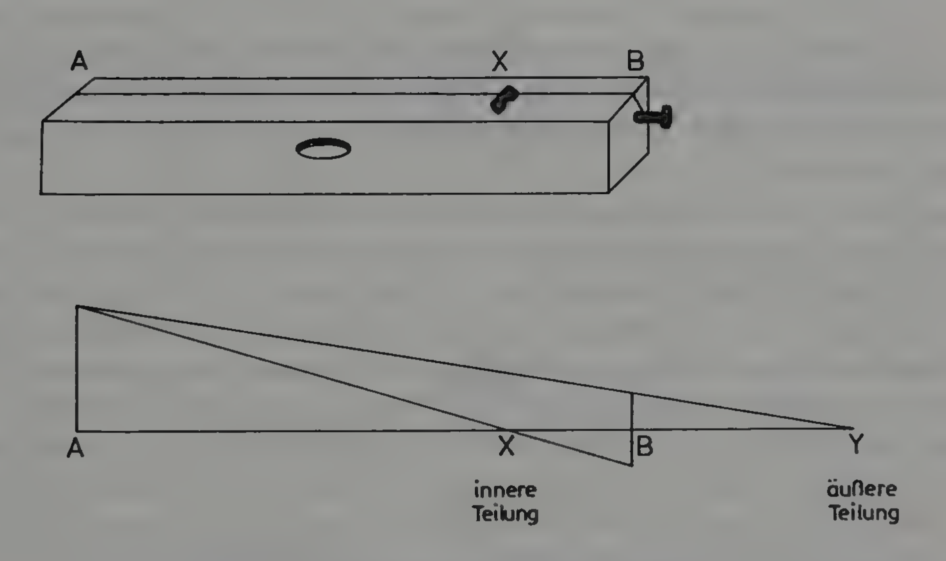
Es liegen in diesem Fall drei rechtwinklige Dreiecke B'CB, X'CX und Y'CY vor, die diese Umkehrung der Zahlenverhältnisse bewirken, wodurch die Zahlenbrüche der harmonischen Teilung in die reziproke Form ungewandelt werden. Dann ist die Strecke AB das harmonische Mittel von AX und AY, die Strecke AB' das arithmetische Mittel von AY' und AX' und die Strecke AC das geometrische Mittel von AB und AB'[1].

Der Grenzfall der harmonischen Teilung ist gegeben, wenn die Strecke AB innen und außen im Verhältnis 1:1 geteilt wird. Der innere Teilungspunkt X = 1/2 entspricht der inneren Grenze des Oktavenraums XB = 1/2 - 1/1, während der äußere Teilungspunkt Y im Unendlichen ∞ liegt. Bei der reziproken Darstellung erfolgt eine zahlenmäßige Umkehrung des Oktavenraums, X'B' = 1/1 - 2/1, und entsprechend auch der hier auftretenden Intervalle. Der äußere Teilungspunkt Y = ∞ fällt durch die Umkehrung mit dem Punkt A zusammen (A = Y' = 0/0).

1) M. Zacharias, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1930, 97; O. Hermann, Über die Ableitung der Formeln bei der harmonischen Teilung, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 34, 1903, 340ff.



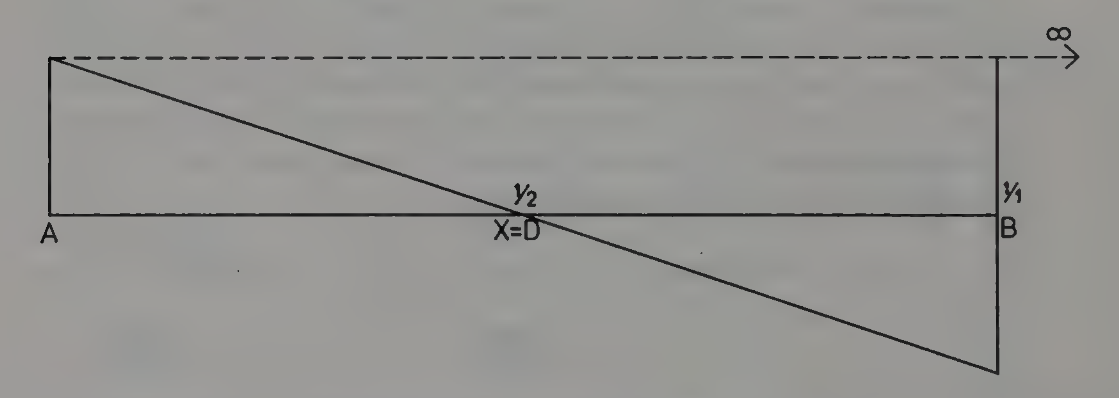
Es ist jetzt auch möglich, die Längenverhältnisse der harmonischen Teilung auf die schwingende Saite des Monochords zu übertragen und harmonikal zu interpretieren:



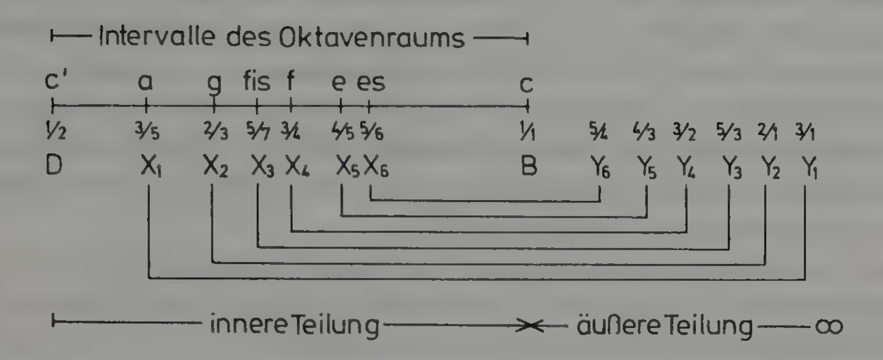
4 harmonische Punkte: A, B und X, Y

komplementäre Teilungsverhältnisse der Saite		komplementäre Intervalle					
AX : XB	BY : XB	AX/AB	AB	BY/XY	AX/AB	AB	BY/XY
2 : 1	3 : 1	2/3	1/1	3/4	g	c	f
5 : 3	4 : 1	5/8	1/1	4/5	as	c	e
3 : 2	5 : 1	3/5	1/1	5/6	a	c	es
4 : 3	7 : 1	4/7	1/1	7/8	b-	c	d+
5 : 2	7 : 3	5/7	1/1	7/10	fis	c	ges
8 : 1	9 : 7	8/9	1/1	9/16	d	c	b

Im Grenzfall der harmonischen Teilung wird die Saite AB 1:1 geteilt. Der innere Teilungspunkt D bildet die innere Grenze des Oktavenraums, während der äußere Teilungspunkt Y im Unendlichen liegt.



Harmonikal bedeutet dies, daß alle Intervalle X_1, X_2, X_3 usw., auf die schwingende Saite bezogen, innerhalb des Oktavenraums, der Strecke DB, liegen und so durch die innere Teilung mathematisch festgelegt sind.



Die Zahlenverhältnisse, die sich aus der äußeren Teilung ergeben, sind harmonikal nicht zu vergleichen mit den Zahlenverhältnissen der inneren Teilung. Nur die letzteren können als Intervalle des Oktavenraumes ausgelegt werden. Dieser mathematische Zusammenhang ist besonders für eine harmonikale Interpretation von Zahlenbrüchen entscheidend, da hier ein grundsätzlicher Unterschied in der Bedeutung von *analogen*[1] Zahlenverhältnissen gegeben ist. Dies geht auch aus den Zahlenbeispielen der vorigen Abbildung eindeutig hervor.

An diesem Beispiel wird deutlich, wie schwierig harmonikale Zusammenhänge zu interpretieren sind. Es ist zunächst nur schwer zu erfassen, daß im Fall des Teilungsverhältnisses 3:2 das entstehende Intervall der inneren Teilung 3/5 die große Sexte bedeutet, während der entsprechende Zahlenwert der äußeren Teilung 3/1 lediglich ein Zahlenverhältnis darstellt. Hier wird ersichtlich, daß es einer harmonikalen Zahlenlehre bedarf, die auf ein akustisches Meßinstrument (Kanon) wie z. B. das Monochord begründet ist und dadurch einen neuen harmonikalen Inhalt der Zahlen vermittelt. Die Schwierigkeit der harmonikalen Interpretation von Zahlenqualitäten ist dabei keineswegs auf die harmonische Teilung beschränkt, sondern betrifft auch andere Gebiete. Die heutige Zahlenlehre macht es sich zu leicht, wenn sie den Zahlen jegliche Qualitäten abspricht.

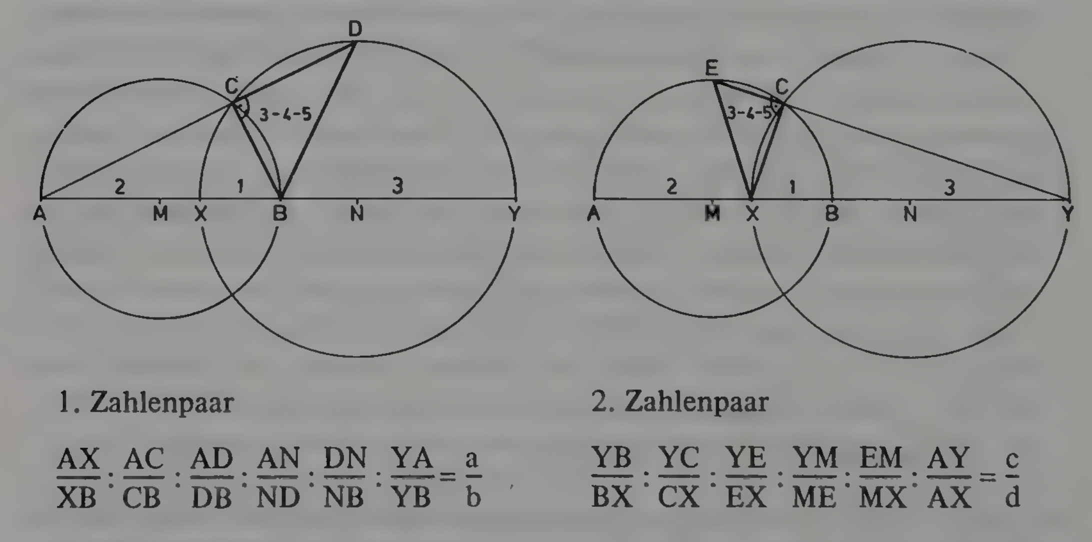
Die Bedeutung der ganzen Zahlen im Naturbereich läßt sich sowohl für die Mathematik als auch für die Physik und Biologie verfolgen. So formuliert Paul GOHLKE in seinem Buch über „Die ganzen Zahlen im Aufbau der Welt“: *Wenn Max Planck recht hatte, daß alle Wirkung in der Welt nur ganzzahliges Vielfaches einer kleinsten Wirkung, also einer Wirkungsschwelle sein kann, dann kommt der ganzen Zahl für die Erkenntnis einer so beschaffenen Welt eine einzigartige Bedeutung zu, dann müssen die Gesetze der ganzen Zahlen Weltgesetze sein*[2].

1) Zum Begriff *analog*: A. Szabo, Anfänge der griechischen Mathematik, Wien 1969, 197ff; Th. Horovitz, Vom Logos zur Analogie. Die Geschichte eines mathematischen Terminus, Zürich 1978.
2) P. Gohlke, Die ganzen Zahlen im Aufbau der Welt, Paderborn 1965, 9.

Nach L. Kronecker (1823-1891) hat die natürlichen Zahlen der liebe Gott gemacht, nach R. Dedekind (1831-1916) sind die ganzen Zahlen freie Schöpfungen des menschlichen Geistes. Für die Zahlentheorie ist es gleichgültig, wer die natürlichen Zahlen geschaffen hat.[1] Für MINKOWSKI (1864-1909) bedeutete die Zahlenlehre *eine gewaltige Musik für diejenigen, die nicht nur erbaut, sondern auch ergötzt sein wollen, die einschmeichelnden Melodien herauszuheben und so zu ihrem Genusse anzulocken*[2].

Eine harmonikale Zahlenlehre, die diese Musik beschreibt, muß erst noch geschrieben werden. Ansätze in diese Richtung wurden vor allem durch die Harmonik Hans KAYSERs und seine Tonzahlen geleistet[3].

Es ist in diesem Rahmen nicht möglich, die vielfältigen Möglichkeiten auszuschöpfen, die sich aus der Interpretation der harmonischen Teilung oder der vier harmonischen Punkte ergeben. Der Kreis des Apollonius wurde im Kapitel über die Spektrallinien schon vorgestellt (147). In diesen Bereich gehören aber auch der Satz des PTOLEMÄUS (um 150 n. Chr.), der Satz des MENELAOS (um 100 n. Chr.) sowie der FEUERBACHsche Kreis. Der Apollonische Kreis ist der elementarste der hier aufgeführten Sätze. Er bietet die Möglichkeit, die harmonische Teilung und die drei verschiedenen Zahlenebenen in einer einzigen, relativ einfachen Figur geometrisch darzustellen. Diese Figur bildet die Vorlage für eine umfassende Zusammenstellung (198) der zugeordneten Zahlenpaare, pythagoreischen Zahlen, harmonischen Teilung und komplementären Intervalle.



1. Zahlenpaar

$$\frac{AX}{XB} : \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} : \frac{AN}{ND} : \frac{DN}{NB} : \frac{YA}{YB} = \frac{a}{b}$$

2. Zahlenpaar

$$\frac{YB}{BX} : \frac{YC}{CX} : \frac{YE}{EX} : \frac{YM}{ME} : \frac{EM}{MX} : \frac{AY}{AX} = \frac{c}{d}$$

apollonische Zahlen a, b, c, d

1) K. H. Indlekofer, Zahlentheorie, Stuttgart 1978, 18; H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin 1964², 1; R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig 1930, III.
2) H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1911, XVIII: Gedächtnisrede von D. Hilbert.
3) H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Kap.: Die ganzen Zahlen, 27-29.

Die beiden zugeordneten Zahlenpaare a/b und c/d stehen untereinander in einfacher Beziehung:

$$a + b = c$$

$$a - b = d$$

Dadurch ist es möglich, diese Zahlen, deren Kennzeichen das gleiche pythagoreische Dreieck ist, auch über ihre Quadrate in eine Beziehung zu bringen.

$$(a^2 + b^2) : (c^2 + d^2) = 1 : 2$$

Die Teilungsverhältnisse a/b und c/d lassen sich über den Apollonischen Kreis direkt ableiten. Dementsprechend nennt man diese Zahlen *Apollonische Zahlen,* da sie ganzzahlige Lösungssysteme der diophantischen Gleichung

$$c^2 + d^2 = 2\,(a^2 + b^2)$$

darstellen[1]. Die Zahlen a, b, c, d stehen untereinander in vielfältiger Beziehung, da sie sich verschiedenen mathematischen Inhalten zuordnen lassen. Darüber hinaus bedeuten sie harmonikal als *ganze Zahlen* das Teilungsverhältnis einer Saite und führen damit direkt zu den entsprechenden komplementären Intervallen (s. auch die Tafel der nächsten Seite).

a) Pythagoreische Zahlen

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2}\right)^2 = 1^2$$

b) Diophantische Gleichungen

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (bc \mp ad)^2$$

$$\frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{c^2 - d^2} = 1$$

$$\frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2} = 2$$

c) Harmonische Teilung

$$\frac{ad}{bd} : \frac{ac}{bc} = 1$$

$$\frac{ad \cdot bc}{ac \cdot bd} = 1$$

$$\frac{ad + bc}{ac - bd} = 1$$

d) Komplementäre Intervalle, die sich zur Oktave ergänzen

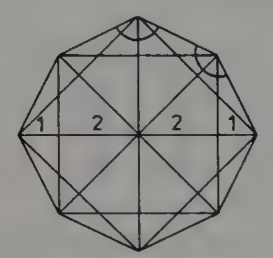
$$\frac{a}{a + b} \otimes \frac{c}{c + d} = \frac{1}{2}$$

1) J. Naas / H. L. Schmid , Mathematisches Wörterbuch, Berlin 1965[3], Band 1, 81; Meyers Lexikon der Technik und der Naturwissenschaften, Mannheim 1969, 162.
2) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 1, 1900, 482.

Apollonische Zahlen (Harmonikale Quaternionen)		Pythagoreische Zahlen			Harmonische Teilung			Komplementäre Intervallzahlen	
$(a^2+b^2):(c^2+d^2)=1:2$		$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$			$\frac{ad \cdot bc}{ac \cdot bd}=1$			$\frac{a}{a+b} \otimes \frac{c}{c+d} = \frac{1}{2}$	
$a+b = c$		$(cd)^2+(\frac{c^2-d^2}{2})^2=(\frac{c^2+d^2}{2})^2$							
$a-b = d$									
a/b	c/d				ad	bd	bc	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{c}{c+d}$
2/1	3/1	3	4	5	2	1	3	2/3	3/4
3/2	5/1	5	12	13	3	2	10	3/5	5/6
4/1	5/3	15	8	17	12	3	5	4/5	5/8
4/3	7/1	7	24	25	4	3	21	4/7	7/8
5/2	7/3	21	20	29	15	6	14	5/7	7/10
6/1	7/5	35	12	37	30	5	7	6/7	7/12
5/4	9/1	9	40	41	5	4	36	5/9	9/10
7/2	9/5	45	28	53	35	10	18	7/9	9/14
6/5	11/1	11	60	61	6	5	55	6/11	11/12
8/1	9/7	63	16	65	56	7	9	8/9	9/16
7/4	11/3	33	56	65	21	12	44	7/11	11/14
8/3	11/5	55	48	73	40	15	33	8/11	11/16
7/6	13/1	13	84	85	7	6	78	7/13	13/14
9/2	11/7	77	36	85	63	14	22	9/11	11/18
8/5	13/3	39	80	89	24	15	65	8/13	13/16
9/4	13/5	65	72	97	45	20	52	9/13	13/18

Die Formel $(a^2 + b^2) : (c^2 + d^2) = 1 : 2$ ist so interessant, daß es angebracht erscheint, einige Anwendungsmöglichkeiten am Beispiel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 herauszugreifen und mathematisch zu beschreiben.

1) Schnitt durch die Achsenebene zweier komplementärer Pyramidenwürfel [210] – [310]:



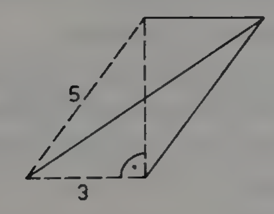
$$\cos_\alpha = -\frac{3}{5} \qquad \cos_\beta = -\frac{4}{5}$$

3–4–5

1. Zahlenpaar 2/1
2. Zahlenpaar 3/1

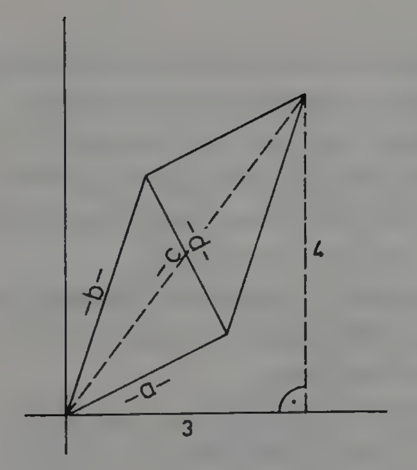
$$\frac{2^2 + 1^2}{3^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

2) Parallelogrammsatz: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.



$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{1}{2}$$

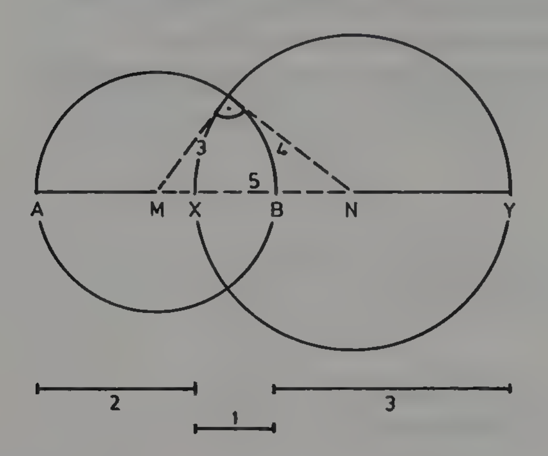
$$\frac{3^2 + 5^2}{(\sqrt{6^2 + 4^2})^2 + (\sqrt{4^2 + 0^2})^2} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{2^2 + 1^2})^2 + (\sqrt{3^2 + 1^2})^2}{(\sqrt{4^2 + 3^2})^2 + (\sqrt{2^2 + 1^2})^2} = \frac{1}{2}$$

3) Harmonische Teilung:



Teilungsverhältnis der beiden Zahlenpaare 2/1 und 3/1

$$\frac{2^2 + 1^2}{3^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \otimes \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

In Beispiel 1 konnten die Apollonischen Zahlen an den beiden kristallinen Pyramidenwürfeln [210] und [310] im Schnitt durch die Achsenebene nachgewiesen werden und in Beispiel 3 mit den gleichen strukturellen Zahlenqualitäten über die harmonische Teilung, wobei sich die entsprechenden Intervalle direkt ableiten ließen. Beispiel 2a und 2b führten über den Parallelogrammsatz zu ganz anderen Zahlenverbindungen, obwohl in allen drei Fällen das pythagoreische Dreieck 3–4–5 den Ausgangspunkt der Untersuchung bildete.

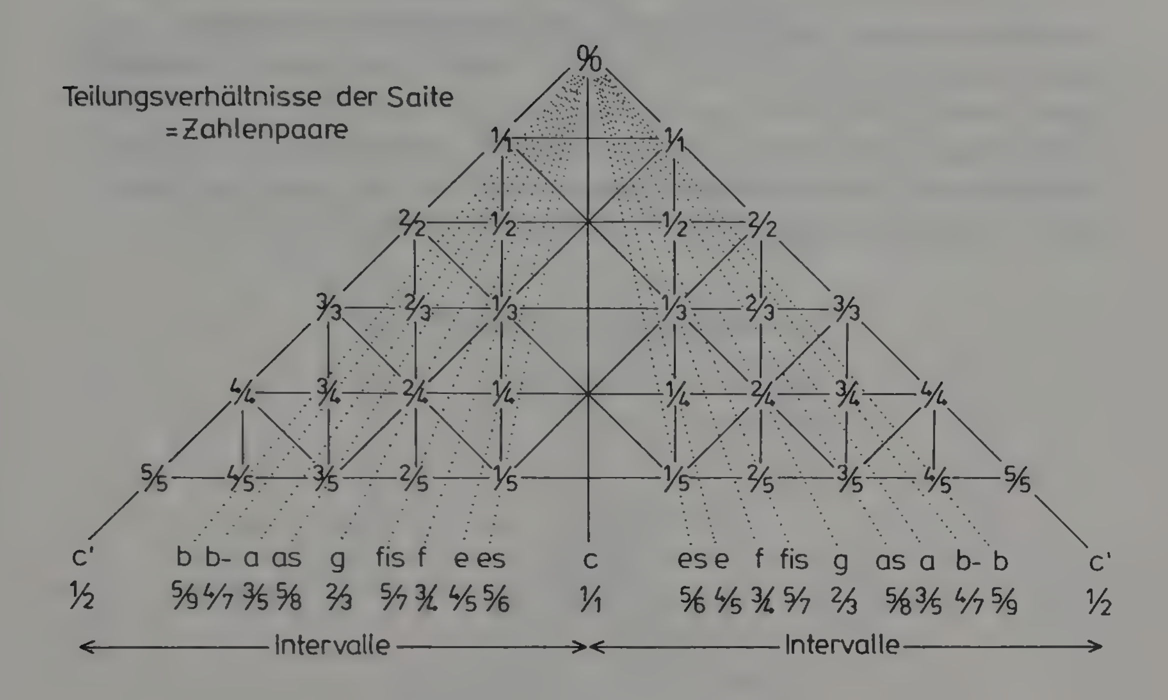
Es ist nunmehr möglich, die ganzen Zahlen in ein harmonikales Gesamtschema (198) einzuordnen und sie musikalisch zu bewerten. Man kann dies auf vielfältige Art erreichen, wobei jedoch immer die drei Zahlenebenen die tragenden Säulen sind:

Zahlenpaare = Apollonische Zahlen = Teilungsverhältnis einer Saite
Pythagoreische Zahlen
Intervallzahlen

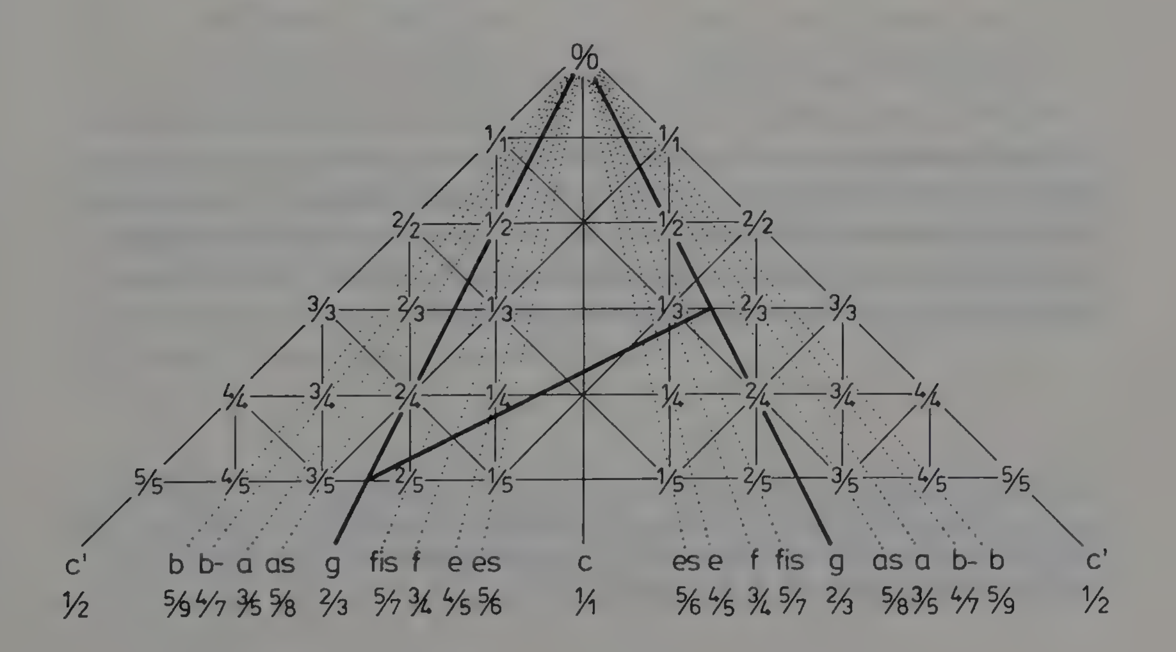
In der folgenden Figur bilden die Zahlenpaare die Katheten rechtwinkliger Dreiecke innerhalb eines Koordinatensystems. Verbindet man durch zwei Strahlen, die jeweils vom Punkt 0/0 ausgehen, die gleichen Zahlenpaare (1/2, 2/4, 3/6 usw.) mit dem gleichen Intervallwert und fällt auf einen der beiden Strahlen das Lot, so entsteht das dem Intervall entsprechende pythagoreische Dreieck (201 oben).

Es lassen sich durch ein derartiges harmonikales Schema die einzelnen Zahlenebenen auf einfachste Weise ineinander überführen, ohne daß jedesmal die entsprechenden Formeln herangezogen werden müssen.

Das Beispiel des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 und des Zahlenpaares (2/1) führt so direkt zu dem Intervall der Quinte 2/3 und dem Ton g (201 unten).



Beispiel:	Teilungsverhältnis der Saite Zahlenpaar	2 : 1
	pythagoreisches Dreieck:	3–4–5
	Intervall: 2/3 (g)	

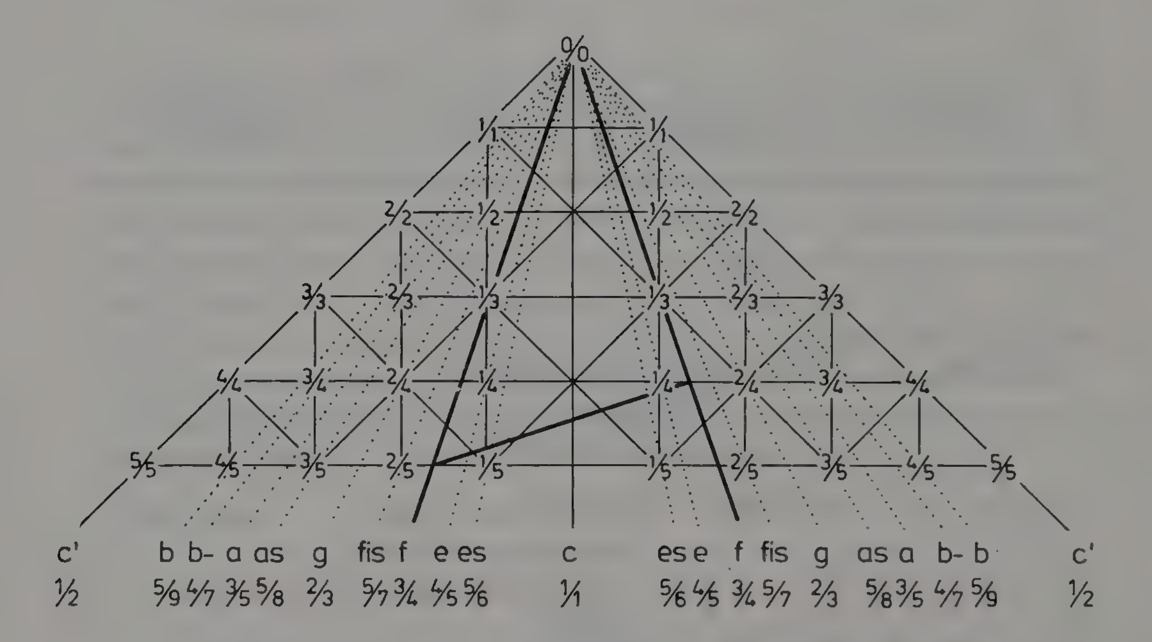


Jedes pythagoreische Dreieck tritt nicht nur als Grundtripel, sondern auch als kathetenvertauschtes Dreieck auf, welches harmonikal das komplementäre Intervall bildet. Dies wird in der folgenden Abbildung am gleichen pythagoreischen Dreieck 3–4–5 und dem Zahlenpaar (3/1) demonstriert, das das Intervall der Quarte 3/4 und den Ton f bildet. Die Komplementarität von Winkeln und Intervallen, die dem gleichen pythagoreischen Dreieck zugeordnet werden, kommt in einem derartigen Schema auf einfachste Weise zum Ausdruck.

Teilungsverhältnis der Saite: 3 : 1

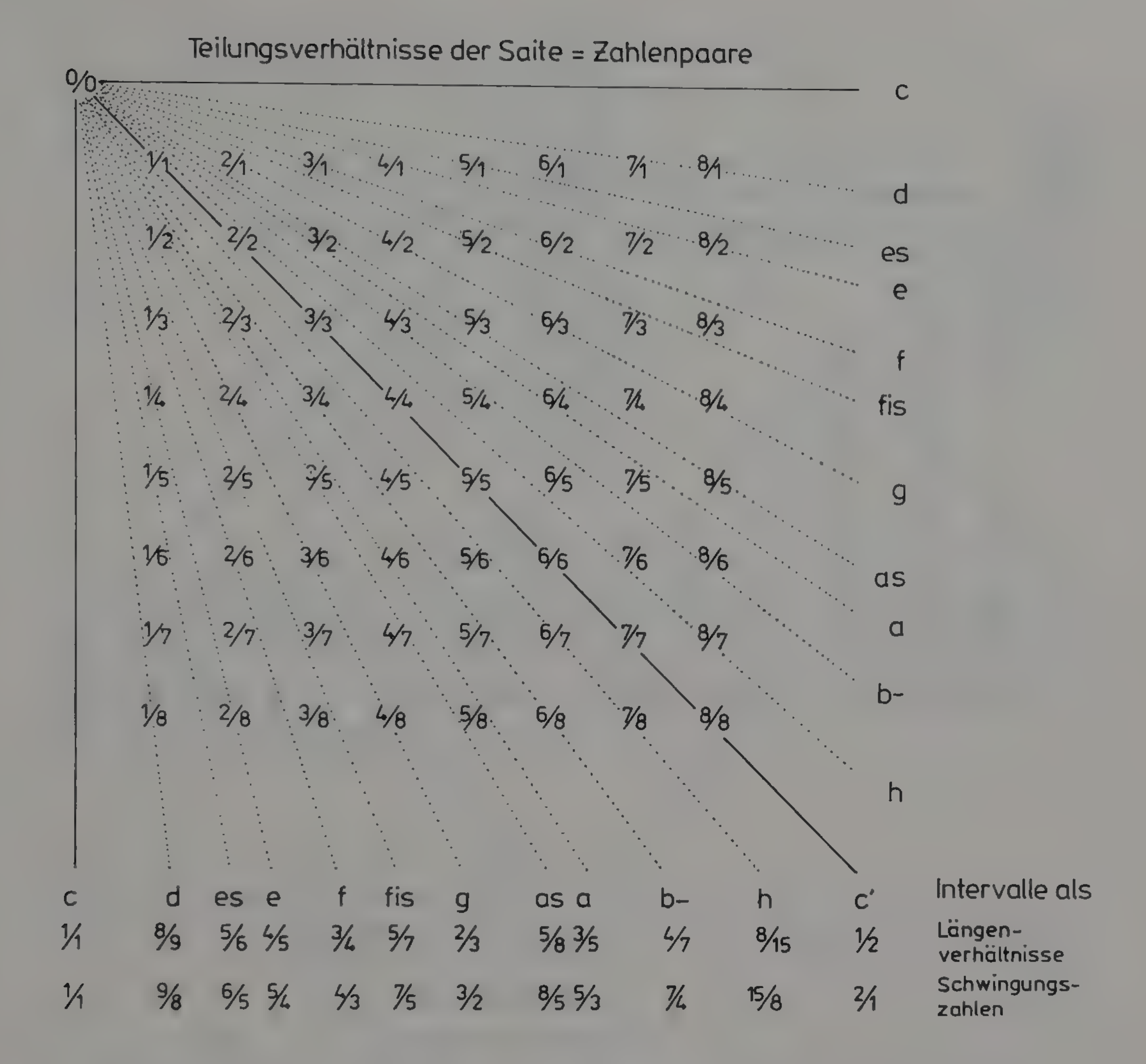
pythagoreisches Dreieck: 3–4–5

Intervall: 3/4 (f)

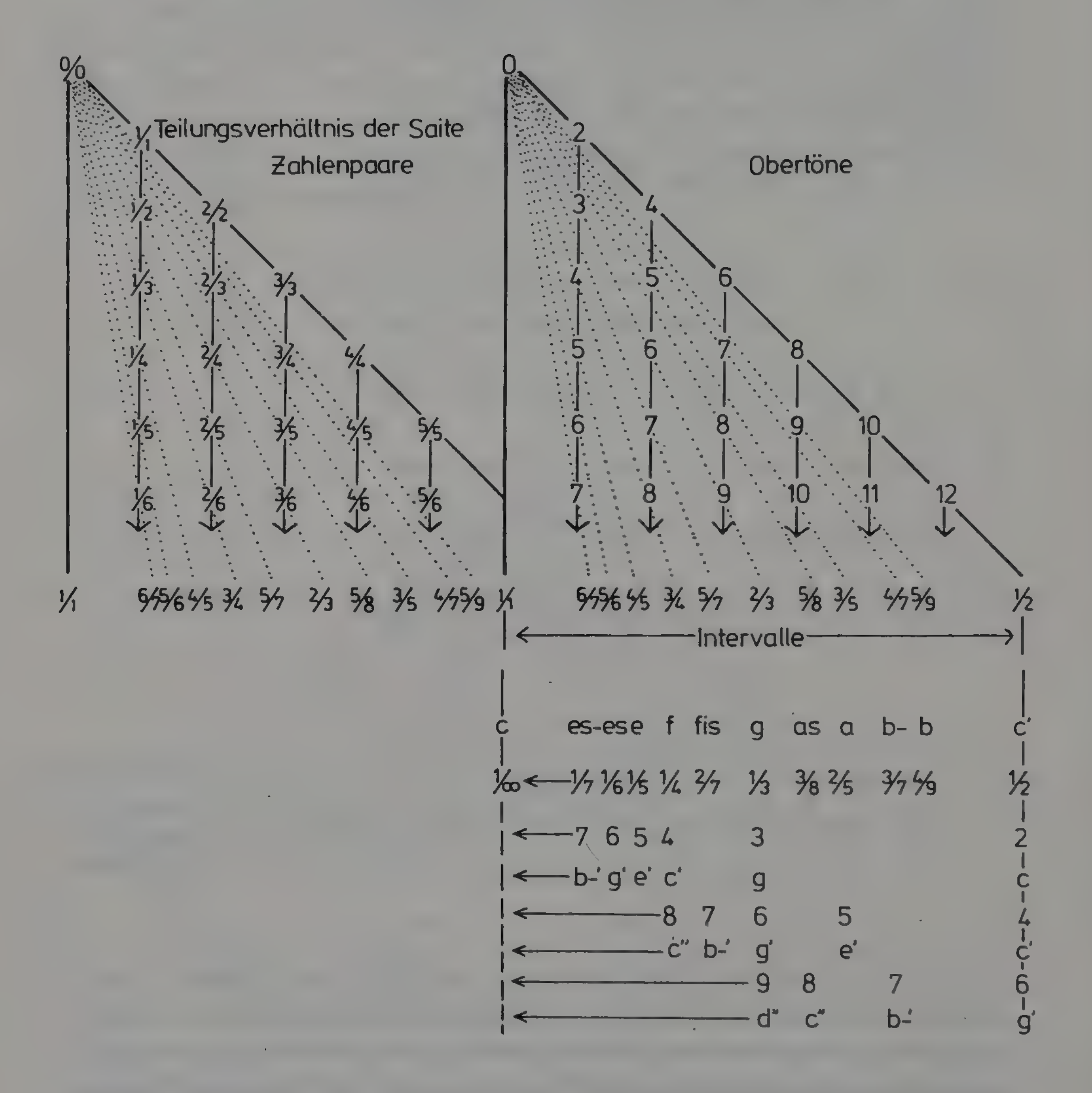


Eine etwas abgewandelte Darstellungsform erweitert die Beziehung der Zahlenpaare in dem Koordinatennetz auf die den Längenverhältnissen reziproken Schwingungszahlen. Die pythagoreischen Dreiecke liegen ebenfalls zwischen den beiden Zahlenstrahlen, die den gleichen Intervallen bzw. Tönen entsprechen, und haben im Punkt 0/0 ihren Ausgangspunkt[1].

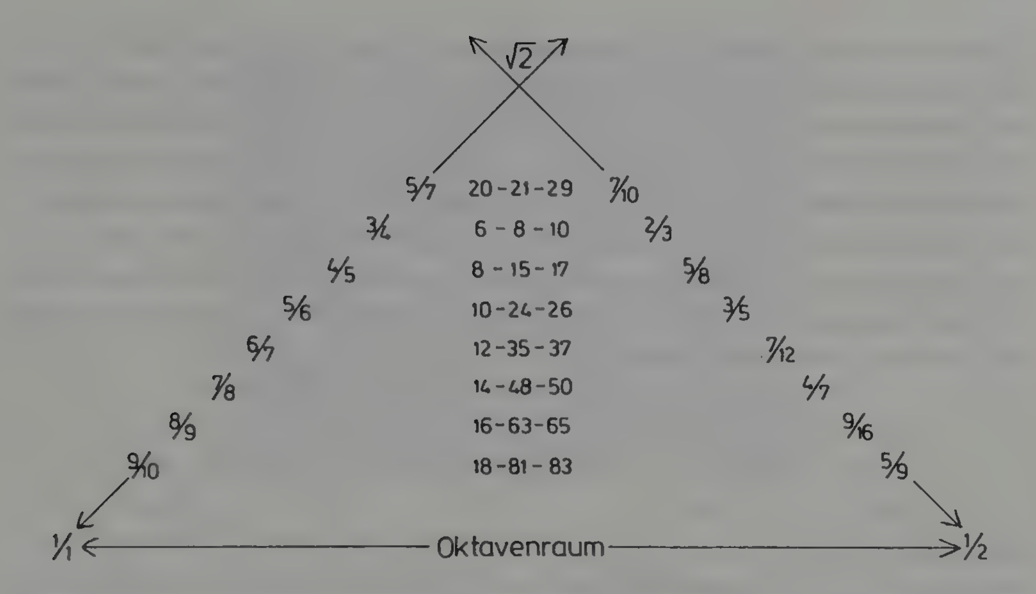
1) Es gibt insbesondere in der harmonikalen Literatur ähnliche Figuren, jedoch mit einem anderen strukturellen Inhalt: A. v. Thimus, Die harmonikale Symbolik des Alterthums, Band 1, Köln 1876, 132; H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 127; ders., Akroasis. Die Lehre von der Harmonik der Welt, Basel 1976³, 25.



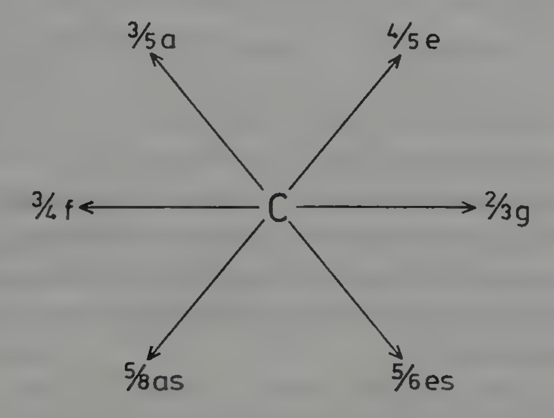
Eine solche Anordnung dient als Vorlage für eine weitere Variante, bei der direkt über die einfache Addition der Zahlen eines Zahlenpaares der entsprechende Oberton gebildet und in eine Beziehung zu dem zugehörigen Intervall innerhalb des Oktavenraumes gebracht werden kann. Die Obertöne sind in der graphischen Darstellung jeweils in einer senkrechten Reihe angeordnet, deren oberster Ton den Grundton bildet. Die Idee wurde aus den Linienspektren des Wasserstoffs entwickelt und kann so als ein geometrisches Beispiel einer (symbolischen) Spektralmusik angesehen werden.



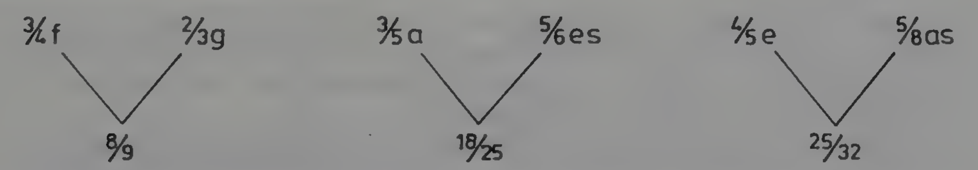
Die komplementären Intervalle innerhalb des Oktavenraums sind auch für eine musikalische Geometrie das zentrale Thema, da ihre Zuordnung zu den pythagoreischen Zahlen ein einfaches mathematisches Prinzip darstellt.



Sie lassen sich auch in das folgende Schema einbinden, in dem die Intervalle als Gegensätze zwar auseinanderstreben, doch aus einer gemeinsamen Wurzel hervortreten.

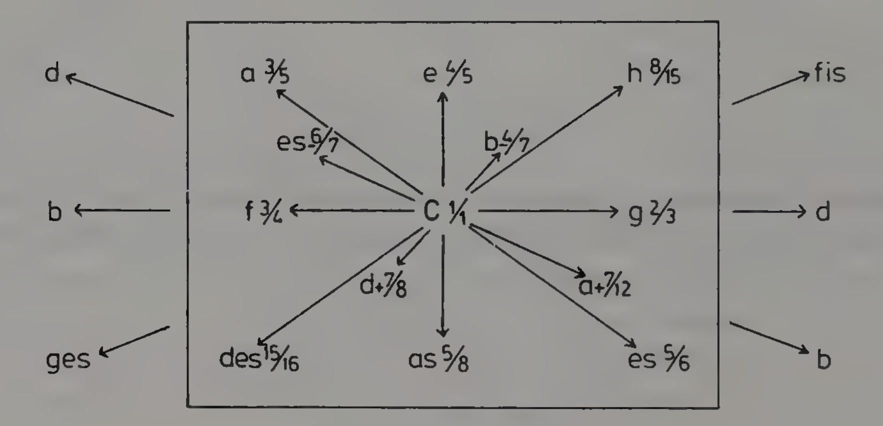


In einem solchen Zusammenhang wird auch verständlich, warum selbst diese für ihre Konsonanz bekannten Intervalle in ihrem harmonikalen Gegeneinander grundsätzlich dissonant sind.



Die einzige Ausnahme bilden scheinbar die Intervalle der Prim und der Oktave. Sie sind jedoch Grenzfälle, da sie erstens den äußeren Rahmen des Oktavenraumes kennzeichnen und zweitens strukturell *nicht* an pythagoreische Zahlentripel gebunden sind.

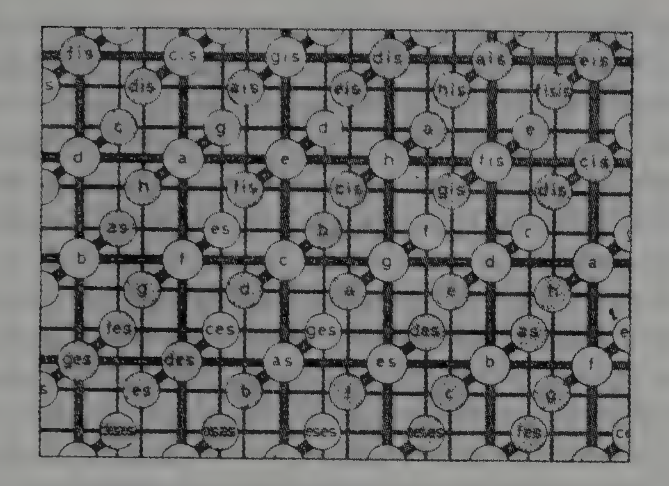
Man kann die Teilung der Oktave über die 7 Töne der diatonischen und die 12 Töne der chromatischen Tonleiter hinaus auf 31, 53, 171 und mehr Töne in der Oktave ausdehnen und bekommt so einen Vorrat von Tönen, der es erlaubt, je nach Anzahl der Töne in der Oktave in möglichst hoher Annäherung an die Reine Stimmung in den verschiedensten Tonarten zu spielen und zu modulieren. Dabei kommt es besonders darauf an, daß die wichtigsten Intervalle innerhalb der Oktave möglichst rein im Sinne der einfachen Zahlenverhältnisse sind. Ein solchermaßen komplementär aufgebautes Intervallschema mit C als Bezugston stellt die folgende Abbildung dar:



Ein derartiger musikalischer Baustein von komplementären Intervallen, in dem nicht nur die bekannten Intervalle vorkommen, die die Primzahlen 2, 3 und 5 enthalten, sondern auch die Intervalle, die durch die Primzahl 7 gekennzeichnet sind, ist in der Musiktheorie von Martin VOGEL in seiner „Lehre von den Tonbeziehungen"[1] beschrieben.

Die Töne ordnen sich zu einem *Tonnetz* von Quint-, Terz- und Septbeziehungen. Soll Beethovens Chorstück „Die Ehre Gottes in der Natur" wirklich rein erklingen, müssen es die hell ausgesparten Töne des nachstehenden Tonnetzausschnitts sein[2]. Die zahlenmäßige Aufschlüsselung des Liedanfangs findet sich auf Seite 237[3].

1) M. Vogel, Die Lehre von den Tonbeziehungen, Bonn 1975, 124, 424; ders., Die Zukunft der Musik, Düsseldorf 1968; ders., Reine Stimmung und Temperierung, in: Musik und Zahl, Bonn 1976, 275.
2) Ders., Die Lehre von den Tonbeziehungen, 421ff.
3) Das Verdienst, auf der Grundlage der Kristallentwicklung eine harmonische Analyse von Liedern vorgenommen zu haben, in der nicht nur die wichtigen Grundintervalle mit den Primzahlen 2, 3 und 5, sondern auch die Siebener-Intervalle miteinbezogen sind, gebührt zweifellos Victor Goldschmidt. Auf seine diesbezüglichen Untersuchungen wird deshalb besonders hingewiesen. Zur harmonischen Analyse von Beethovens „Die Ehre Gottes in der Natur" vgl. V. Goldschmidt, Materialien zur Musiklehre, Heidelberg 1925, 659ff; M. Vogel, Die Lehre von den Tonbeziehungen, 421f.



Instrumente – auch Tasteninstrumente –, die ein Musizieren in Reiner Stimmung erlauben, wird es, da sie möglich sind, eines Tages geben. Eine nach dem obigen Tonnetz eingerichtete 48-tönige Pfeifenorgel ist in Bau[1]. Auf den musiktheoretischen Hintergrund solcher *Reininstrumente* kann hier nicht weiter eingegangen werden. Nur soviel sei gesagt: Die reinen Intervalle sind, wie dies an den Kristallen und bei den Spektrallinien nachgewiesen werden konnte, ein wesentliches Merkmal der Natur, während die temperierten Intervalle keinerlei Bezug zur Natur haben.

Die Bedeutung der reinen Intervalle für die Musiktheorie ist größer, als dies heute – bedingt durch die Temperierung bestimmter Musikinstrumente wie Klavier, Orgel, Cembalo u. a. sowie durch häufige Modulation bzw. den Wechsel der Tonarten – im allgemeinen zum Ausdruck kommt. Die temperierten Intervalle, in denen der Halbtonschritt durch die $\sqrt[12]{2}$ bestimmt ist, sind mathematisch wesentlich komplizierter aufgebaut als die einfachen Zahlenverhältnisse der reinen Intervalle.

1/1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2	reine Intervalle
c	d	e	f	g	a	h	c’	
1	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	$\sqrt[12]{2^{12}}$	temperierte Intervalle

Die Frage, welcher Stimmung – temperiert oder rein – der Vorzug gebührt, hat schon Hermann von HELMHOLTZ zugunsten der Reinen Stimmung beantwortet: *Nach diesen Erfahrungen, glaube ich, kann kein Zweifel darüber bleiben, wenn noch einer da war, dass die theoretisch bestimmten Intervalle, welche ich in dem vorliegenden Buche die natürlichen genannt habe, wirklich die natürlichen für das unverdorbene Ohr sind; dass ferner die Abweichungen der*

1) M. Vogel, Musiktheater I: Die Krise des Theaters und ihre Überwindung, Bonn 1980, 388.

temperirten Stimmung dem unverdorbenen Ohre in der That merklich und unangenehm sind; dess drittens trotz der feinen Unterschiede in einzelnen Intervallen, das richtige Singen nach der natürlichen Scala viel leichter ist, als nach der temperirten Scala.[1] Diese Stellungnahme zur Frage der temperierten und der reinen, natürlichen Stimmung war für Helmholtz so wichtig, daß er sie durch Sperrung aus dem Gesamttext hervorhob. Sie ist an die Befürworter der temperierten Stimmung gerichtet.

Max PLANCK, der in sehr freundschaftlichem Verkehr mit Helmholtz stand, wußte um diesen Kampf zwischen den Anhängern der temperierten und denen der reinen, natürlichen Stimmung, als er seine musikwissenschaftliche Schrift „Die natürliche Stimmung in der modernen Vokalmusik"[2] veröffentlichte. Auch in seinen Vorlesungen zur Akustik brachte er Ausschnitte der Musiktheorie mit einer besonderen Vorführung auf dem von Carl EITZ entwickelten *Reinharmonium*, das mit 104 Tönen in jeder Oktave sehr gut geeignet war, harmonisch-reine, pythagoreische und temperierte Intervalle und Dreiklänge in einen akustischen Vergleich zu bringen[3]. Obwohl seine Ergebnisse teils zur reinen, teils zur temperierten Stimmung führten, war sein abschließendes Urteil doch eindeutig: *Dabei kam ich zu dem mir einigermaßen unvermuteten Ergebnis, daß unser Ohr die temperierte Stimmung unter allen Umständen der natürlichen Stimmung vorzieht. Sogar in einem harmonischen Durdreiklang klingt die natürliche Terz gegenüber der temperierten Terz matt und ausdruckslos*[4]. Dies war zweifellos ein hartes Urteil gegen die Reine Stimmung, das überdies noch in krassem Gegensatz zu den Untersuchungen von HELMHOLTZ stand. *Während Planck am Beispiel der Terz die temperierte Stimmung verfocht, war für Hermann von Helmholtz gerade die „Unreinheit" der temperierten Terz der Anlaß gewesen, sich für die natürliche Stimmung auszusprechen. So gab es in der Wertung der reinen Stimmung mit Helmholtz eine Meinungsdifferenz, wohl die einzige, die je bestanden hat*[5].

Dies kennzeichnet sehr treffend die Problematik um die richtige musikalische Stimmung, die heute genauso wie vor 90 Jahren noch nicht entschieden ist. Das ist umso merkwürdiger, wenn man bedenkt, welch hohen Stellenwert die Musik in unserem täglichen Leben einnimmt. Auch ist diese Frage insbesondere für die vorliegende Thematik, in der die Intervalle mit den pythagoreischen Zahlen in einen strukturellen Zusammenhang gebracht werden, von großer Be-

1) H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1870[3], 634; 1877[4], 667 XIII; 1896[5], 667 XIII.
2) M. Planck, in: Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 1893, 418-440; ders., in: Annalen der Physik und Chemie 48, 1993, 8-9.
3) Ders., Einführung in die theoretische Physik, 2. Band, Leipzig 1922[2], 88ff; J. R. Partington, Erinnerungen an Max Planck, in: Physikalische Blätter 4, 1948, 172.
4) M. Planck, Physikalische Abhandlungen und Vorträge, 3. Band, Braunschweig 1958, 384.
5) A. Hermann, Max Planck in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten (= Rowohlts Monographien 198), Reinbek bei Hamburg 1973, 25.

deutung. Gibt es überhaupt einen Beweis, daß unser Ohr die Intervalle im Sinne der reinen, natürlichen Stimmung bewertet und daß diese Intervalle tatsächlich an die pythagoreischen Zahlen gebunden sind? Wenn es gelingen würde, diesen Beweis im Sinne der reinen Stimmung zu erbringen, würde dies einen wesentlichen Schritt nach vorn bedeuten, was die physiologische Grundlage des musikalischen Hörens betrifft.

In dem Buch „Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit" von E. von CYON werden, wie schon der Titel aussagt, die für unsere Erkenntnis grundlegenden Anschauungsformen von Raum und Zeit auf das Ohr zurückgeführt: auf die Bogengänge als physiologische Basis für die Raumempfindungen und auf die Schnecke als Basis für unsere Zeitempfindungen. *Der Aufbau unserer Vorstellungen vom dreidimensionalen Raum beruht allein auf den Wahrnehmungen der drei Richtungen unseres Bogengangapparates ohne irgendwelche Intervention von Zahlen*[1]. Ferner: *Diese Fähigkeit der Schnecke, mit solcher Präzision so feine Rechenoperationen (wie die Apperzeption der Tonintervalle) zu beherrschen, zwingt zu der Annahme, daß letztere ein wahres arithmetisches Sinnesorgan ist, dem wir direkt die Kenntnis der elementaren Regeln der Rechenkunst verdanken*[2]. Es ist also zunächst die Vorstellung eines dreidimensionalen Raumes, der über die drei Richtungen des Achsenkreuzes die Wahrnehmung der Tonintervalle vermittelt. Dies ist die erste Grundvoraussetzung, da ohne das Achsenkreuz eine Zuordnung von Intervallen und pythagoreischen Zahlen unmöglich wäre. In welcher Art und mit welcher Präzision die einzelnen Rechenoperationen und damit die Wahrnehmung der Tonintervalle ablaufen, ist wenig bekannt, sonst gäbe es keine Diskussion um reine oder temperierte Intervalle.

Die Problematik konzentriert sich deshalb zunächst darauf, ob es möglich ist, mit dem Vorgang des musikalischen Hörens den Nachweis der pythagoreischen Zahlen zu verbinden.

Es ist bekannt, daß das Ohr bei einem Intervall, Akkord o. ä. weitere Beitöne hört, die sich entweder als Obertöne oder als Kombinationstöne unterscheiden lassen. Im vorliegenden Fall interessieren nur die Kombinationstöne, die unterteilt werden in *Differenztöne* und *Summationstöne*. Die Differenztöne wurden unabhängig voneinander von G. A. SORGE (1744), J. B. ROMIEUX (1752), J. A. SERRE (1753) und G. TARTINI (1754) entdeckt und beschrieben, während die Summationstöne erst wesentlich später von HELMHOLTZ (1856) erkannt wurden[3]. Die Differenztöne sind im allgemeinen wesentlich stärker als

1) E. v. Cyon, Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit, Berlin 1908, 414.
2) Ebenda, 416.
3) H. v. Helmholtz, Über Combinationstöne, in: Wissenschaftliche Abhandlungen, Band 1, Leipzig 1882, 256-262, 263-302; ders., Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik, Kapitel: Die Combinationstöne, Braunschweig 1870², 239-249, 618-620.

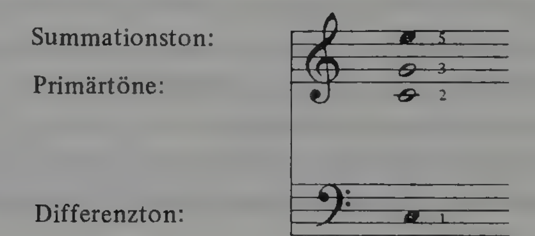
die Summationstöne, was den zeitlichen Unterschied ihrer Entdeckung erklärt[1]. Helmholtz unterscheidet in seiner „Lehre von den Tonempfindungen" die Kombinationstöne als

1. Differenztöne, weil ihre Schwingungszahl gleich der Differenz der aus den beiden primären Tönen entstehenden Schwingungszahlen ist, und
2. Summationstöne, weil ihre Schwingungszahl gleich der Summe der aus den beiden primären Tönen entstehenden Schwingungszahlen ist.

Dabei bilden sich zunächst die Kombinationstöne 1. Ordnung, wobei diese wiederum je nach ihrer Stärke mit den Ausgangstönen und auch untereinander in Wechselwirkung treten, so daß weitere Kombinationstöne höherer Ordnung entstehen.

Der Summationston 1. Ordnung liegt damit grundsätzlich in der Tonhöhe über den beiden Ausgangstönen, während der Differenzton 1. Ordnung zwischen oder unter den beiden Ausgangstönen liegt, je nachdem wie groß der Zwischenraum zwischen den beiden Ausgangstönen ist. Man kann den mathematischen Zusammenhang der Entstehung der Kombinationstöne vereinfachen, indem man von den ganzen Zahlen der Schwingungszahlen der Obertöne ausgeht und aus diesen zunächst nur die Kombinationstöne 1. Ordnung ableitet.

Ein Beispiel: Gibt man auf das Ohr eine Quinte 2:3 mit den Tönen c' und g', bildet das Ohr in der 1. Ordnung den Summationston $2 + 3 = 5$ (e") und den Differenzton $3 - 2 = 1$ (c).



Der rechnerische Vorgang besteht also lediglich darin, die Schwingungszahlen zu addieren und zu subtrahieren. Sind a und b die Schwingungszahlen der Ausgangstöne und c und d die der neu entstehenden Kombinationstöne 1. Ordnung, so gilt:

$$a + b = c$$

$$a - b = d$$

Versteht man jedoch die Bildung der beiden Kombinationstöne (Summationston c und Differenzton d) aus den beiden Ausgangstönen a und b als einen ganzheitlichen Hörvorgang, so fehlt hier das Bindeglied, das die Ausgangstöne und die neu entstehenden Kombinationstöne 1. Ordnung durch einen in sich

1) H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, 1896^{5}, 254.

abgeschlossenen mathematischen Vorgang beschreibt. Die eigentliche Formel muß deshalb erweitert werden und lautet:

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{1}{2}$$

Sie bedeutet: Der Quotient aus der Summe der Quadrate der Schwingungszahlen der Ausgangstöne und der Summe der Quadrate des entstehenden Summations- und Differenztons ist mathematisch an den Oktavenraum oder kurz an die Oktave gebunden.

Mit dieser Aussage ist die Formel noch nicht vollständig interpretiert. Vielmehr muß hier noch der Nachweis der gleichen pythagoreischen Zahlen – als Grundtripel und die entsprechende Verdoppelung – erbracht werden, und der mathematische Inhalt muß sich in anschaulicher Weise am Monochord überprüfen lassen.

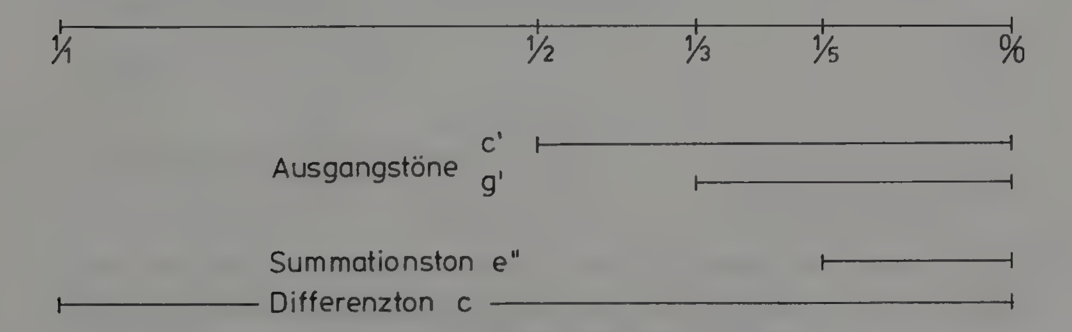
Aus dem oben angeführten Beispiel mit den Ausgangstönen c' (2) und g' (3) und c (1) und e'' (5) als Differenz- und Summationston ergibt sich:

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3^2 + 2^2}{5^2 + 1^2} = \frac{13\ (-12\ -5)}{26\ (-24\ -10)} = \frac{1}{2}$$

wobei die Summen der Quadratzahlen den Hypotenusen des pythagoreischen Grunddreiecks 5–12–13 bzw. seiner Verdoppelung entsprechen. Dieser mathematische Sachverhalt ist analog zu der Formel der Apollonischen Zahlen, wie sie im Gesamtschema (198) dargestellt ist, geht jedoch zahlenmäßig direkt von den Schwingungszahlen bzw. von den reziproken schwingenden Saitenverhältnissen aus.

Bei der Übertragung auf die Saite des Monochords ergibt sich für das Beispiel der beiden Ausgangstöne c' (2) und g' (3) das folgende Bild:



Man kann anstelle der Schwingungszahlen der Obertöne jeden anderen rationalen Wert für die Schwingungszahlen der Ausgangstöne ansetzen, wie es auch

möglich ist, direkt von den reziproken Längenverhältnissen einer schwingenden Saite auszugehen.

$$\frac{\frac{1}{(1/a)^2} + \frac{1}{(1/b)^2}}{\frac{1}{(1/c)^2} + \frac{1}{(1/d)^2}} = \frac{1}{2}$$

Man findet in der diesbezüglichen Literatur verschiedene Theorien zu den Kombinationstönen, u. a. auch solche, in denen quadratische und kubische Kombinationstöne enthalten sind. Diese stehen jedoch zu der angegebenen Formel in keinerlei Beziehung[1].

Die nachfolgende Tabelle soll den Zusammenhang der Schwingungszahlen der Ausgangs- und Kombinationstöne mit den pythagoreischen Zahlen noch einmal verdeutlichen.

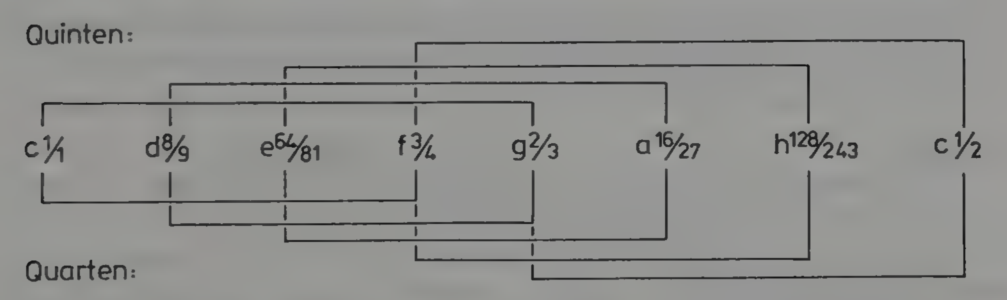
Ausgangstöne		Kombinationstöne 1. Ordnung		pythagoreische Zahlen
		Differenztöne a – b = c	Summationstöne a + b = d	
a	b	c	d	$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$
c 1	c' 2	c 1	g' 3	(3–4–)5
c 1	g' 3	c' 2	c'' 4	(6–8–)10
c' 2	g' 3	c 1	e'' 5	(5–12–)13
c 1	c'' 4	g' 3	e'' 5	(8–15–)17
g' 3	c'' 4	c 1	b-'' 7	(7–24–)25
c' 2	e'' 5	g' 3	b-'' 7	(20–21–)29
c 1	g'' 6	e'' 5	b-'' 7	(12–35–)37
c'' 4	e'' 5	c 1	d''' 9	(9–40–)41

1) M. M. Rieländer, Reallexikon der Akustik, Frankfurt/Main 1982, 172.

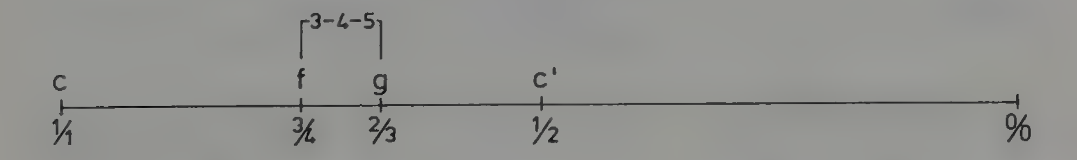
Für HINDEMITH waren die Kombinationstöne sinnbildlich *der trigonometrische Punkt außerhalb des klingenden Intervalls, mit dessen Hilfe das Ohr eine Art Dreiecksmessung vollzieht und dadurch ein Urteil über den Reinheitsgrad des Intervalls erhält*[1]. Er traf mit diesem Ausspruch genau den Kern der Problematik von Ausgangs- und Kombinationstönen.

Die hier aufgezeigte Lösung des Problems der Kombinationstöne gibt nicht nur einen Hinweis auf die Physiologie des musikalischen Hörens und die besondere Bedeutung der reinen, natürlichen Intervalle, sondern sie ist eigentlich das schönste Beispiel für die Idee der Harmonie und Komplementarität: Ausgangstöne und Kombinationstöne bedingen und ergänzen sich über die Komplementarität am gleichen pythagoreischen Dreieck innerhalb des Oktavenraums.

Die Teilung des Oktavenraums nach dem Prinzip der pythagoreischen Zahlen führt zu einer immer weitergehenden Differenzierung und entsprechend auch zu höheren Primzahlen in den Intervallen. Die Zahlen der Intervalle selbst sind in der reinen Stimmung jedoch wesentlich niedriger, als es z. B. in der *pythagoreischen Tonleiter* der Fall ist, die bekanntlich nur aus Quarten und Quinten, mithin aus den Primzahlen 2 und 3 zusammengesetzt ist.

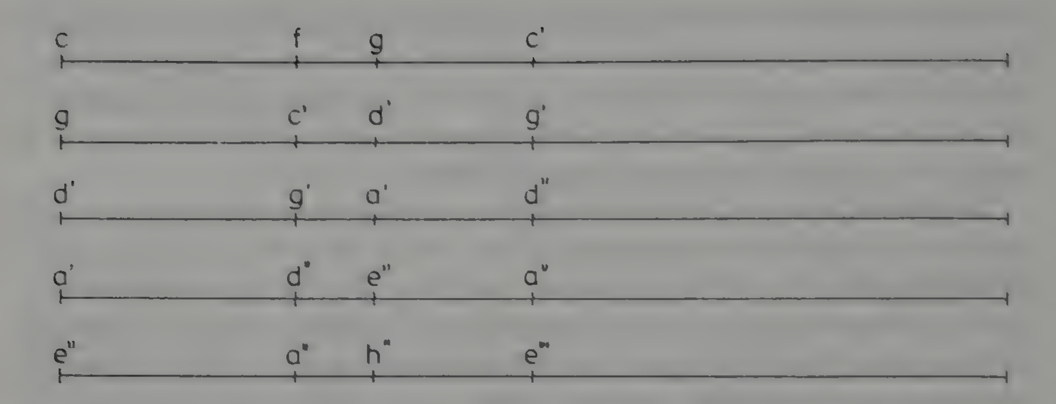


Den Anfang der pythagoreischen Tonleiter bilden die beiden Grundintervalle Quinte 2/3 und Quarte 3/4, die sich innerhalb des Oktavenraums direkt dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 zuordnen lassen.



Indem man nun, ausgehend von den beiden Grundintervallen, jeweils vier weitere Quintenschritte hinzufügt, kommt man durch entsprechende Oktavreduzierung der Intervalle direkt zur pythagoreischen Tonleiter.

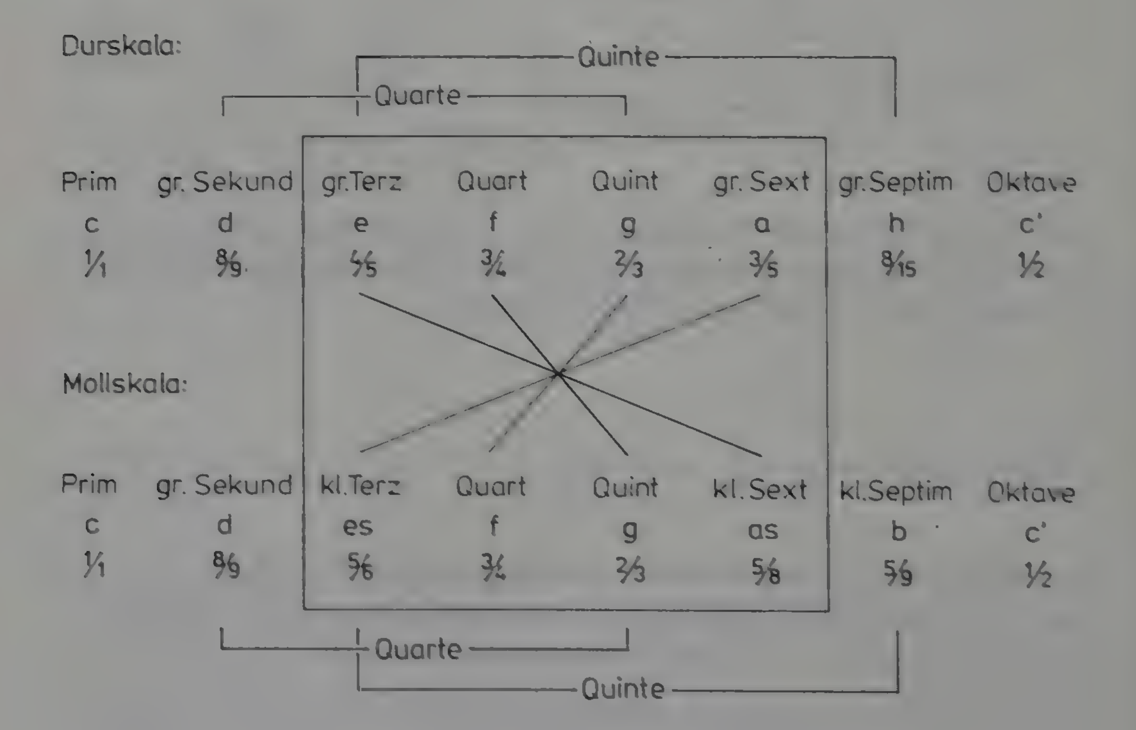
1) P. Hindemith, Unterweisung im Tonsatz. Theoretischer Teil, Mainz 1940², 81; M. Vogel, Die Lehre von den Tonbeziehungen, 53.



Die fünf gleichen Ganztonschritte dieser Tonleiter: c–d, d–e, f–g, g–a und a–h, haben, bedingt durch diese Anordnung auf der Saite, alle die gleiche Beziehung zum pythagoreischen Dreieck 3–4–5.

Pythagoreische Tonleiter und pythagoreisches Dreieck 3–4–5 sind so in ihrem Wesen vollkommen identisch. Dahinter dürfte mehr als nur eine Namensverwandtschaft stehen, da es sich hier um uralte Grundelemente der Mathematik und der Musiktheorie handelt.

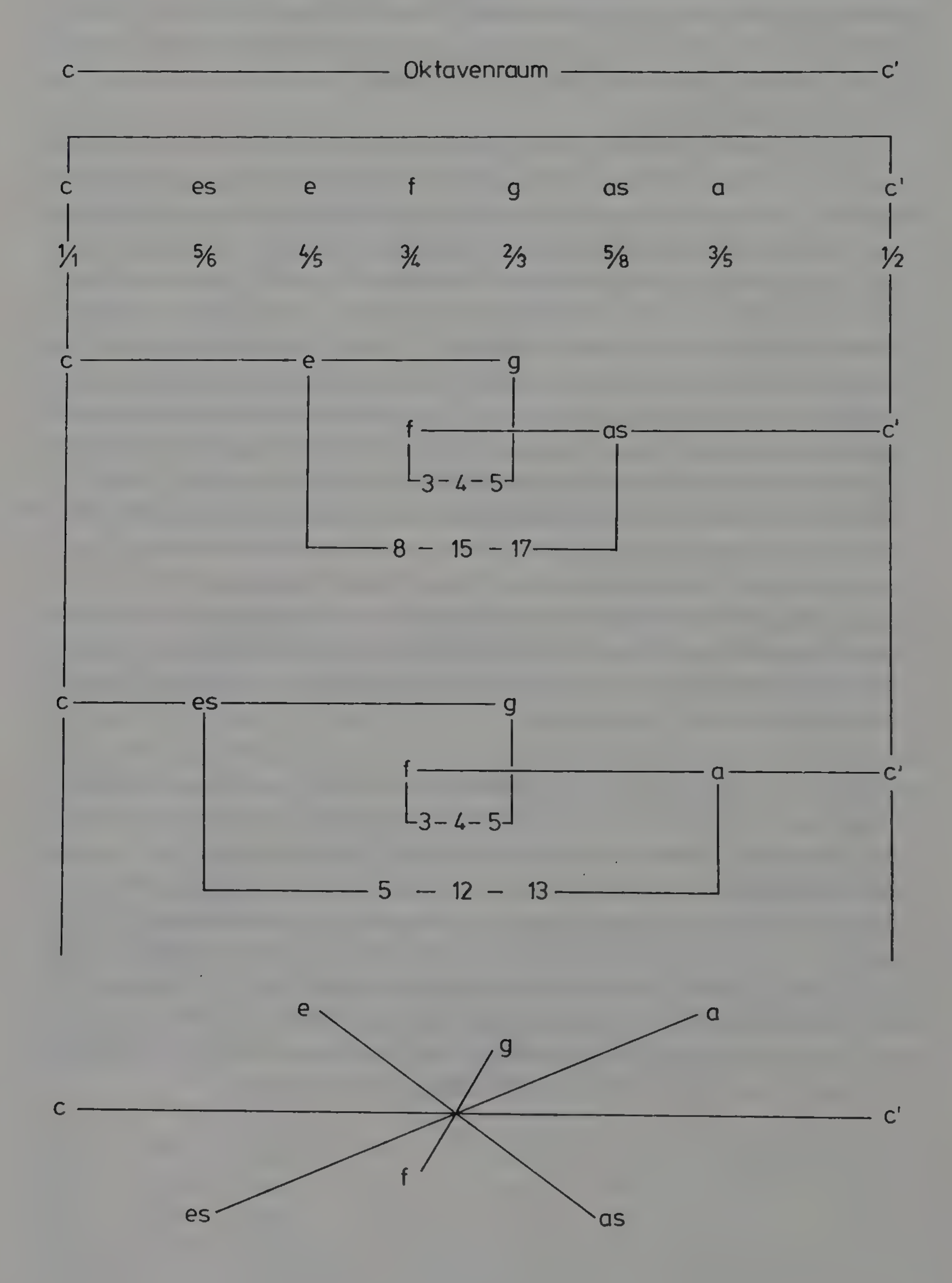
In der diatonischen Dur- bzw. Molltonleiter kommen zu den Grundintervallen Quinte 2:3 und Quarte 3:4 mit den reinen Terzen 4:5 und 5:6 und Sexten 3:5 und 5:8 zusätzlich neue musikalische Elemente hinzu, die strukturell den



beiden folgenden pythagoreischen Zahlentripeln 5–12–13 und 8–15–17 zugeordnet werden können. Die Sekunde 8/9 und Septimen 8/15 und 5/9 sind in der Diatonik über Quinten- und Quartenschritte abgeleitete Intervalle, während Quinte, Quarte, Terzen und Sexten die *komplementäre Grundeinheit* der Dur- und Molltonleiter bilden.

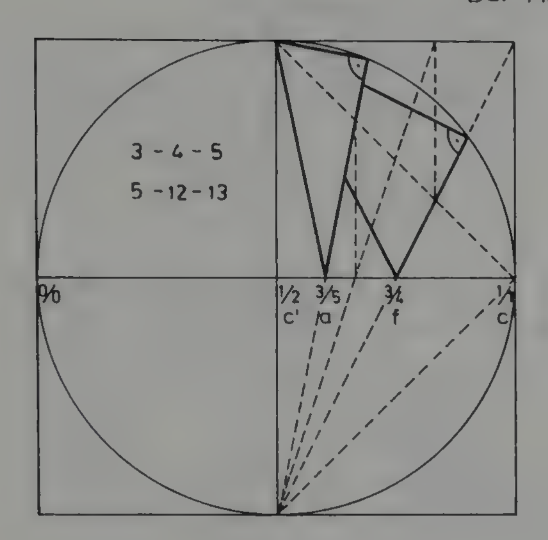
Das komplementäre Prinzip von Dur und Moll läßt sich so einfacher am Beispiel der Dreiklänge demonstrieren. Die Dreiklänge der beiden Tongeschlechter enthalten jeweils eine große und eine kleine Terz und unterscheiden sich lediglich dadurch, daß beim Durakkord die große Terz der kleinen vorangeht, während beim Mollakkord der umgekehrte Sachverhalt vorliegt. Geht man davon aus, daß die Intervalle das Ursprüngliche sind und in den Akkorden ein abgeleitetes Prinzip vorliegt – eine Feststellung, die nicht nur durch die Kristallharmonik untermauert wird –, so läßt sich jeder Dur- und Mollakkord, von den Intervallen ausgehend, als ein harmonikal komplementäres Schema auffassen. Es werden hier nur die Grundakkorde in Dur und Moll behandelt, nicht dagegen deren zahlreiche Erweiterungen bzw. Umkehrungen.

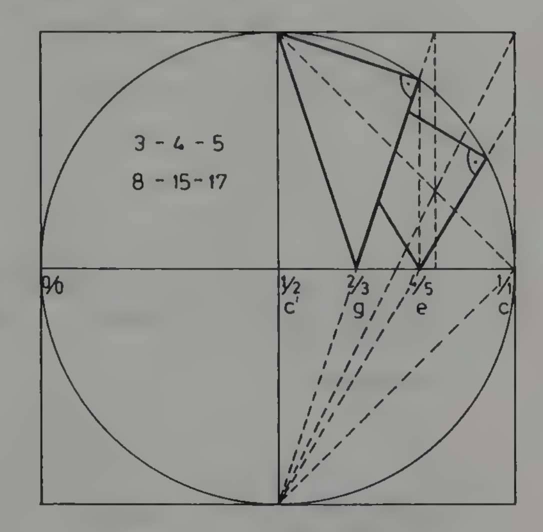
Jeder Durdreiklang ist durch das Zahlen- bzw. Längenverhältnis 1/4 : 1/5 : 1/6 und jeder Molldreiklang durch das Verhältnis 6:5:4 gekennzeichnet. Es läßt sich nun zeigen, daß es jeweils einen Dur- und einen Mollakkord gibt, die sich innerhalb des Oktavenraums zwei pythagoreischen Zahlentripeln zuordnen lassen und die über die Multiplikation der Einzelintervalle wieder eine komplementäre Einheit bilden. Innerhalb des Oktavenraums der c-Tonalität gibt es ein komplementäres Paar, das aus dem c-Dur- und dem f-Mollakkord besteht, die an die pythagoreischen Dreiecke 3–4–5 und 8–15–17 gebunden sind, und ein zweites Paar: den c-Moll- und den f-Durakkord, die in den pythagoreischen Zahlentripeln 3–4–5 und 5–12–13 ihren strukturellen und harmonikalen Hintergrund haben. Es liegen damit innerhalb des c–Oktavenraums vier verschiedene Akkorde vor, deren gemeinsames Merkmal das gleiche pythagoreische Grunddreieck 3–4–5 ist, während die pythagoreischen Zahlentripel 5–12–13 und 8–15–17 durch die Bildung der entsprechenden Terzen und Sexten die eigentliche Grundlage für den unterschiedlichen Charakter der Dreiklänge bilden. Das dualistische Prinzip eines Moll- und Durakkords, die den gleichen pythagoreischen Zahlentripeln zugeordnet werden können, ist somit in erster Linie in der Komplementarität ihrer Einzelintervalle begründet.



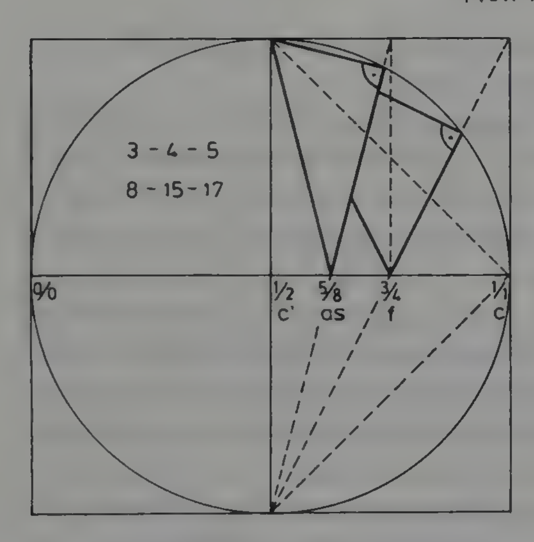
c
Oktavenraum
c'
c
es
e
f
g
as
a
c'
1/1
5/6
4/5
3/4
2/3
5/8
3/5
1/2
c
e
g
f
as
c'
3-4-5
8 - 15 - 17
c
es
g
f
a
c'
3-4-5
5 - 12 - 13
e
a
g
c
c'
f
es
as

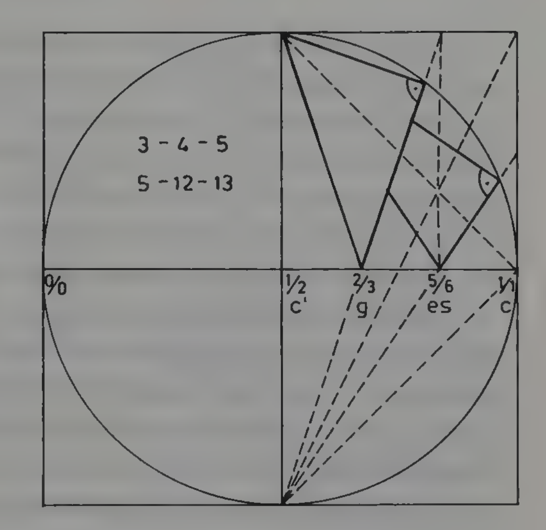
Dur-Akkorde





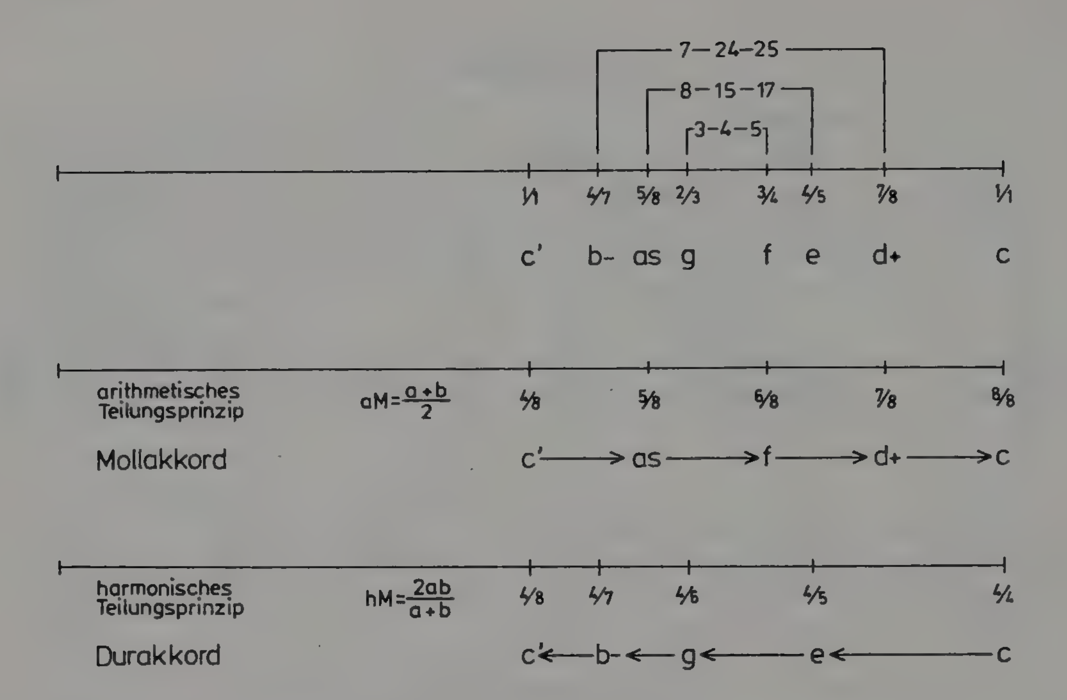
Moll-Akkorde





Im Anhang ist dieses harmonikal-komplementäre Prinzip auf weitere Dur- und Molldreiklänge ausgedehnt (238f).

In die Darstellung der Akkorde lassen sich nun auch weitere Intervalle einbeziehen, wobei sich durch die Hinzunahme der beiden nächsten einfachen und komplementären Intervalle: der Naturseptime 4/7 und des septimalen Ganztons 7/8, ein Dur- und ein Moll-Vierklang ableiten lassen. Dies führt zu einer Vierteilung des Oktavenraums, die im Mollakkord (c) d+←f←as←c, wie prinzipiell in jedem Mollakkord in den Längen gleichstufig ist, im Dur-Akkord c→e→g→b- (c) dagegen in der Stufenfolge das sich verengende Prinzip der Obertonreihe 4 5 6 7 (8) erkennen läßt.



Es gibt damit zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, den Oktavenraum am Beispiel einer schwingenden Saite zu teilen.

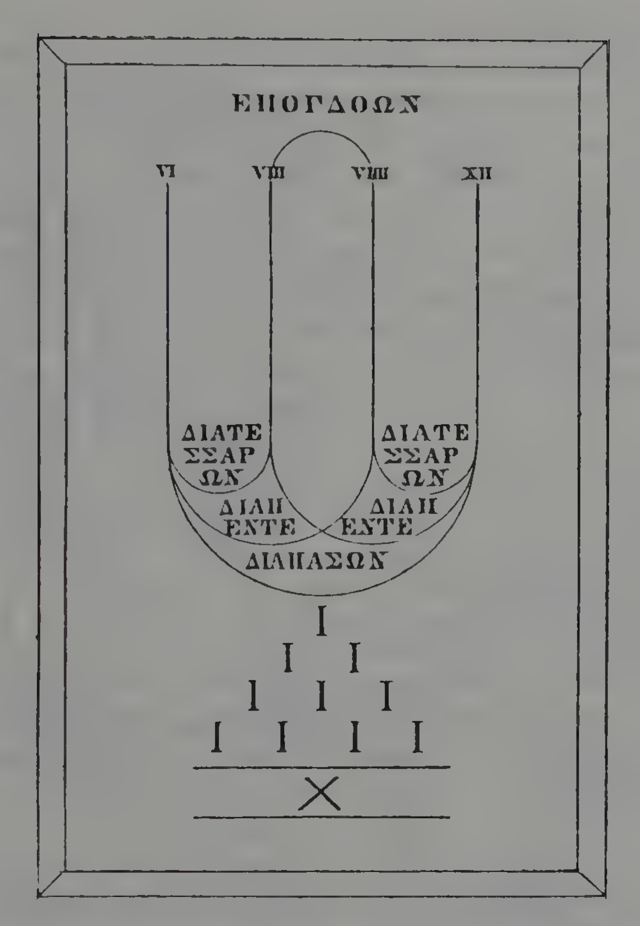
1) Das arithmetische (äquidistante) Teilungsprinzip teilt die Oktave in gleiche Längenabschnitte und ist harmonikal mit dem Mollprinzip identisch. Alle Grundakkorde in Moll haben gleichen Längenabstand der Töne. Jedes Intervall ist das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Intervalle, bedingt durch die Zahlenfolge im Zähler eines Bruches.

2) Das harmonische Teilungsprinzip, wie es charakteristisch für die Längenverhältnisse der Obertonreihe und des Durdreiklangs ist, führt zu einem verengenden bzw. vergrößernden Abstand der Intervalle, bedingt durch die Zahlenfolge im Nenner eines Bruches. Jedes Intervall ist das harmonische Mittel zweier benachbarter Intervalle.

Auch hier sind es die pythagoreischen Zahlen, die den harmonikalen Hintergrund des arithmetischen und harmonischen Teilungsprinzips bilden.

Mit diesen teilweise nur skizzenhaft angedeuteten Elementen der Grundakkorde sollte das harmonikale und komplementäre Grundprinzip in den Dreiklängen dargestellt werden, soweit dies mit den pythagoreischen Zahlen in einen direkten Zusammenhang gebracht werden konnte.

Das Besondere des pythagoreischen Dreiecks 3–4–5 ist allein schon durch seine Umwandlung in die beiden wichtigsten Intervalle: Quinte 2/3 und Quarte 3/4, gegeben. Von daher ist es geboten, auf dieses Urdreieck, wie es von THIMUS genannt wurde, noch etwas ausführlicher einzugehen. Dabei gibt es einen harmonikalen Aspekt, der gerade für eine spätere geschichtliche Bewer-



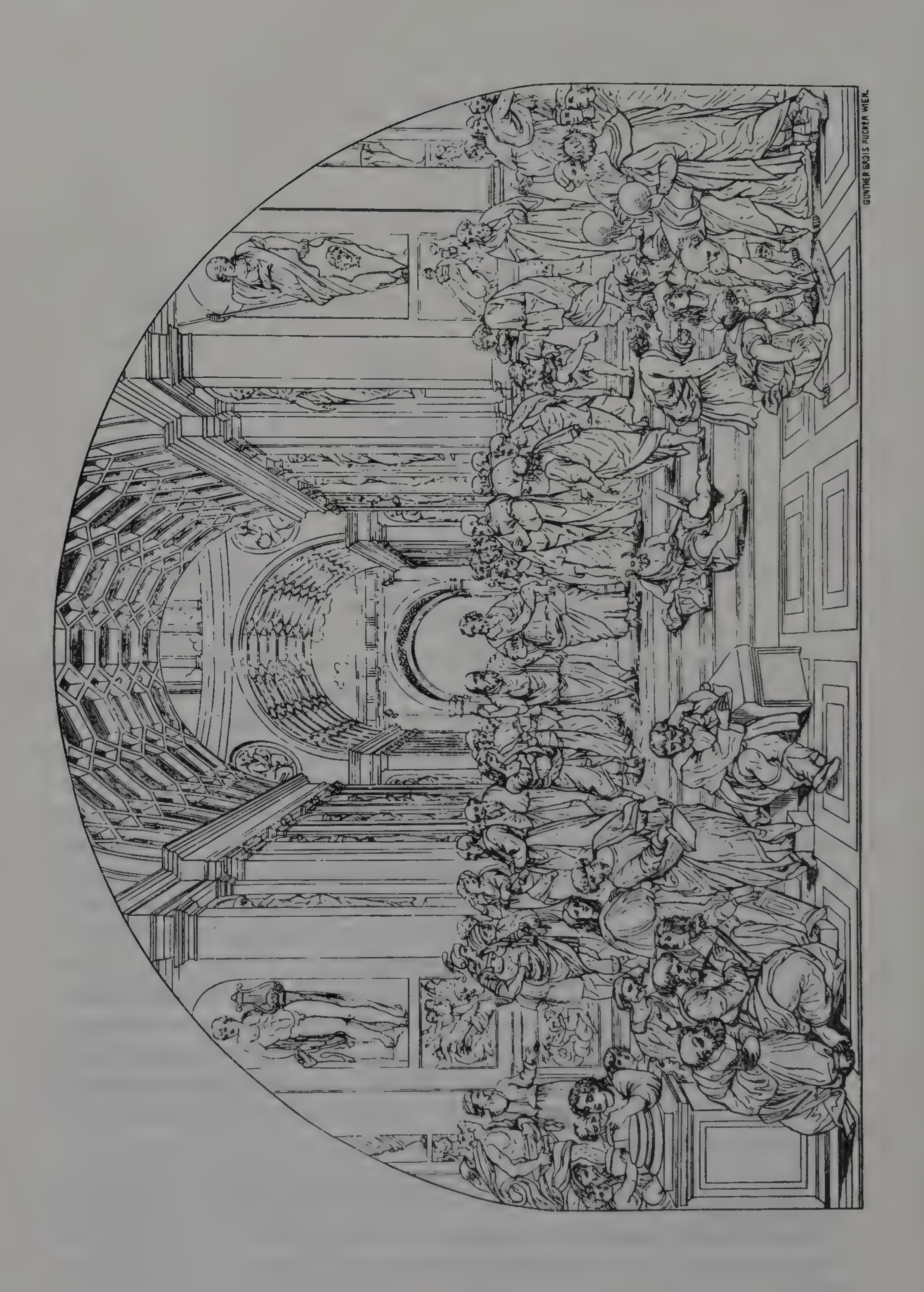
tung von besonderem Interesse sein kann. Es sind dies die Zahlen der *pythagoreischen Tetraktys* 1–2–3–4 und 6–8–9–12, die immer wieder im Sinne der Intervalle Prim, Oktave, Quinte und Quarte interpretiert worden sind. Beide Zahlenfolgen der Tetraktys finden sich auf einer Tafel (siehe oben)[1], die RAFFAEL 1511 in seinem berühmten Bild der *Schule von Athen* (Abbildung[2] auf Seite 220) innerhalb der Gruppe um Pythagoras aufgezeichnet hat. Die *Schule von Athen* zählt zu den großartigsten Wandgemälden Raffaels; sie befindet sich in der *Stanza della Segnatura* des Vatikans in Rom.

Die besondere Bedeutung, die die beiden Zahlenvierheiten 1–2–3–4 und 6–8–9–12 nach Aussage antiker Autoren für Pythagoras und seine Anhänger hatten, ist für den heutigen Menschen nicht ohne weiteres verständlich. Sie reicht vor allem in das Gebiet der harmonikalen Symbolik hinein, wie sie ausführlich von KEPLER, THIMUS, KAYSER, SCHWABE, REISER u. a. untersucht und beschrieben wurde[3].

1) E. Naumann, Erklärung der Musiktafel in Raffael's „Schule von Athen", in: Zeitschrift für bildende Kunst 14, 1879.

2) Nach A. Springer, Raffael und Michelangelo, Leipzig 1883[2], 247.

3) J. Kepler, Exkurs über die pythagoreische Vierheit, in: Weltharmonik, übersetzt und eingeleitet von M. Caspar, München 1973, 89-94; A. v. Thimus, Die harmonikale Symbolik des


GUNTHER GROIS PUCKER WIEN.

Es kommt in diesem Kapitel über *Musikalische Geometrie* lediglich darauf an, zu zeigen, daß beide Formen der Tetraktys nicht nur mit den Intervallen Prim, Oktave, Quinte und Quarte, sondern auch direkt mit dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 in eine vielfältige arithmetische und geometrische Verbindung gebracht werden können. Dadurch wird der harmonikale Inhalt dieser Zahlen von einer ganz anderen Seite erhellt, als dies bisher der Fall war, was auch eine spätere geschichtliche Einordnung dieser harmonikalen Thematik erleichtert.

Auf eine mathematische Beziehung zwischen dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 und der pythagoreischen Tetraktys 6–8–9–12 ist bereits von Dieter KOLK hingewiesen worden: *Wir finden diese Vierheit auf algebraische Weise auch zu unserem Dreieck. Wenn wir die Seiten der Größe nach mit a, b und c bezeichnen, ergeben sich folgende, sehr regelmäßige Ausdrücke:*

$$\frac{ab}{c-a} \qquad \frac{b^2}{c-a} \qquad \frac{a^2}{c-b} \qquad \frac{ab}{c-b}$$

$$6 \qquad 8 \qquad 9 \qquad 12$$

Obwohl die harmonikale Analyse des pythagoreischen Dreiecks bei Dieter Kolk[1] in einem anderen Sinne erfolgt, als dies über die Komplementarität der Intervalle geschieht, ist dies doch die einzige mir bekannte Literaturstelle, die auf eine mögliche Verbindung dieser beiden harmonikalen Grundelemente hinweist.

Alterthums, Köln 1868/1876; J. Schwabe, Hans Kaysers letzte Entdeckung: Die pythagoreische Tetraktys auf Raffaels „Schule von Athen", in: Symbolon, Jahrbuch für Symbolforschung, 5. Band, Basel 1966, 92-102; Th. Reiser, Das Geheimnis der pythagoreischen Tetraktys, Heidelberg 1967.

1) D. Kolk, Eine harmonikale Analyse des pythagoreischen Dreiecks, in: Musik und Zahl, hg. von G. Schnitzler, Bonn 1976, 51-65.

Beide Formen der pythagoreischen Tetraktys, 1–2–3–4 und 6–8–9–12, lassen sich – geometrisch und arithmetisch – auf verschiedene Weise mit dem pythagoreischen Dreieck 3–4–5 sowie auch mit den beiden Intervallen Quinte 2/3 und Quarte 3/4 innerhalb des Oktavenraumes verbinden.

a) Pythagoreisches Dreieck 3–4–5 und Tetraktys 6–8–9–12

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \frac{a+c}{a+b+c} \otimes \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad \frac{8}{12} \otimes \frac{9}{12} = \frac{6}{12} \times \frac{12}{12}$$

$$8 \otimes 9 = 6 \times 12$$

Quinte und Quarte gleich Prime und Oktave

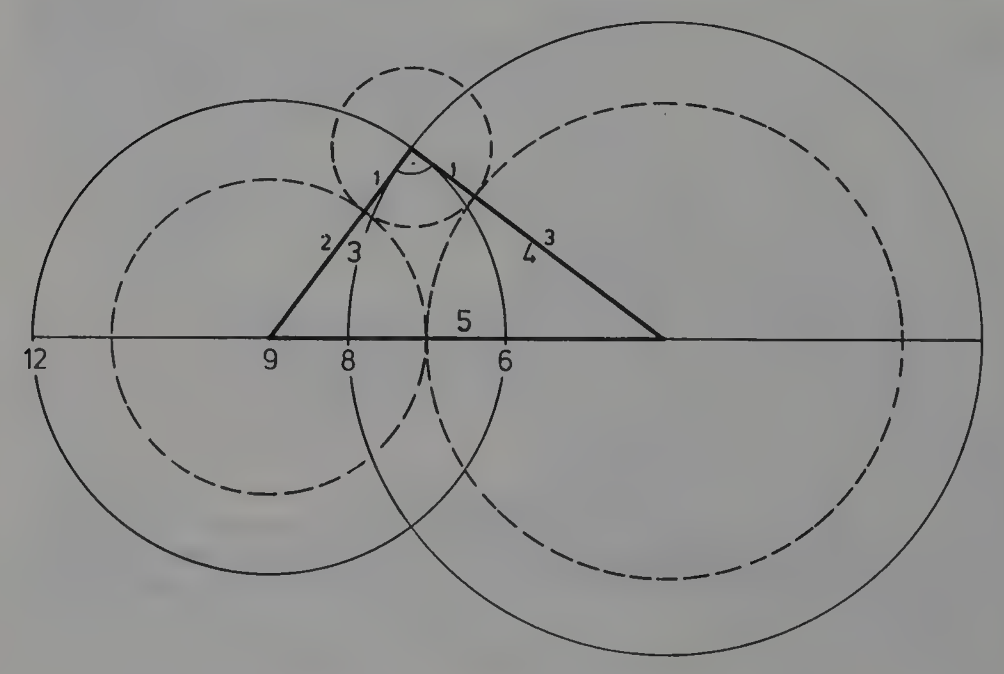
b) Apollonische Zahlen und Tetraktys 1–2–3–4

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{a}{a+b} \otimes \frac{c}{c+d} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3^2 + 1^2}{4^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \otimes \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$$

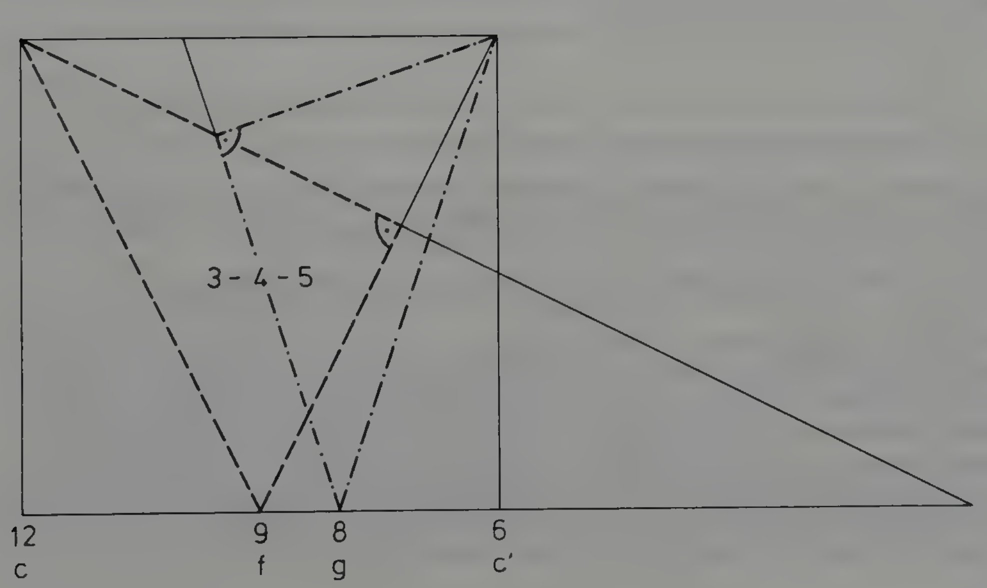
Quarte und Quinte gleich Oktave

c) Harmonische Teilung, Apollonische Kreise, Kreis-Quadrat und Tetraktys 6–8–9–12



3 - 4 - 5
6
c'
8
g
9
f
12
c

3 - 4 - 5
0/0
1/1
c'
4/3
g
3/2
f
2/1
c


3 - 4 - 5
12
c
9
f
8
g
6
c'

Die allgemeine Bedeutung des *pythagoreischen Lehrsatzes* ist so groß, daß man ihn zweifellos zu den wichtigsten mathematischen Grundtheoremen rechnen darf. Er spielt in vielen Zweigen der Naturwissenschaft eine wesentliche Rolle. Dies gilt nicht nur für die Berechnung von Kristallkörpern, sondern auch für andere räumliche Strukturphänomene. So wurde der *Satz des Pythagoras* u. a. von Albert EINSTEIN zur Beschreibung des Relativitätsprinzips einer vierdimensionalen Welt herangezogen[1]. Damit wird schon angedeutet, wie weit unter Umständen der Bogen seiner Anwendung im Sinne einer harmonikalen Interpretation gespannt werden kann.

Es wurde schon eingangs (16) darauf hingewiesen, daß immer wieder im Verlauf der Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes versucht worden ist, seiner mathematischen Beweisführung neue Aspekte abzugewinnen. Dies hat dazu geführt, daß man bis heute über 360 verschiedene Beweise zusammengestellt hat. Darunter zählen etwa 100 algebraische und 240 geometrische Beweise[2]. Dementsprechend gibt es zahlreiche Monographien und eine große Zahl von Abhandlungen über den pythagoreischen Lehrsatz und die pythagoreischen Zahlen, die sich ausschließlich von der mathematischen Seite mit dieser Thematik beschäftigt haben.

Ausgesprochen selten sind jedoch Veröffentlichungen zu finden, die eine Verbindung des pythagoreischen Grunddreiecks 3–4–5 mit harmonikalen Elementen, wie Intervallen, Akkorden o. ä, herstellten, auch wenn diese zu anderen Ergebnissen kamen als im vorliegenden Buch[3]. Die Idee der *komplementären Intervalle* und der an ihr sich entwickelnden *Harmonie der Gegensätze* findet sich in der angeführten Literatur jedenfalls nicht. Darüber hinaus ist mir keine Literaturquelle bekannt, die die pythagoreischen Zahlen insgesamt, also auch 5–12–13, 8–15–17, 7–24–25 usw. in eine harmonikale bzw. musikalische Verbindung gebracht hätte.

1) A. Einstein, Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Braunschweig 1954^{16}, 99; M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin 1964^{4}, 291; H. Minkowski, Raum und Zeit, in: Gesammelte Abhandlungen, 2. Band, Leipzig 1911, 431-434.
2) E. S. Loomis, The Pythagorean Proposition, Ann Arbor 1940^{1}; Washington 1972^{2}.
3) J. Harington (im Briefwechsel mit Newton), in: J. Hawkins, General History of the science and practice of Music, London 1776, vol. III, 142f; zitiert nach H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, 106f; H. Kayser, Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 106f; O. Kleinhammes, Das Pythagoreische Dreieck 3:4:5, in: Die Quadratur des Kreises aus dem Geiste der Musik, Wangen im Allgäu 1949, 57ff; D. Kolk, Eine harmonikale Analyse des pythagoreischen Dreiecks, in: Musik und Zahl, Bonn 1976, 54-65; R. Haase, Geschichte des harmonikalen Pythagoreismus, Wien 1969, 17; W. Scharlau / H. Opolka, Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung, Berlin 1980, 2; E. G. Valens, The Number of Things. Pythagoras, Geometry and Huming Strings, London 1964.

Es steht eindeutig fest, daß die Pythagoreer und auch Platon nicht nur den pythagoreischen Lehrsatz kannten, sondern auch die Formel, die zu den pythagoreischen Zahlen führt. Ebenso sicher ist durch die Geschichtsforschung belegt, daß diese mathematischen Inhalte schon sehr viel früher in Babylon[1], Ägypten, Indien und China in hohem Ansehen standen[2].

Es geht letztlich um die Kernfrage, ob und möglicherweise wie die Pythagoreer die Zahlenverhältnisse, die sie als Tonempfindungen am Monochord überprüfen konnten, in einen Zusammenhang brachten mit der Welt der äußeren Erscheinungen: mit den mathematischen Körpern[3], den musikalischen Skalen[4] und dem Umlauf der Planeten[5]. Eine eindeutige Antwort ist heute sicher noch nicht möglich. Im vorliegenden Fall waren es die Morphologie der Kristalle und die Balmersche Formel für die Spektrallinien des Wasserstoffs, die die Grundlage für die harmonikale Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes und der pythagoreischen Zahlen darstellten. Es wurde nicht die Frage nach der geschichtlichen Bedeutung eines derartigen Lehrsatzes gestellt, sondern diese Sachthemen bildeten den Ausgangspunkt der Untersuchung.

Die Geschichte des Pythagoreismus kann erst dann geschrieben werden, wenn auch auf die Frage nach einer Harmonie für unseren Lebensraum, also einer Planeten- oder Sphärenharmonie eine Antwort gefunden ist. Wie eine derartige Lösung aussehen könnte, ist trotz der zahlreichen bekannten Vorschläge nach wie vor völlig ungewiß. Möglicherweise ist die harmonikale Lösung im 3. Keplerschen Gesetz[6] verborgen, das gerade in diesem Jahr genau 365 Jahre alt wird und von dem es bis heute ebenfalls keine Aufschlüsselung im Sinne einer musikalischen Geometrie gibt. Es genügt keineswegs, eine Formel zu besitzen, die mathematisch diesen Sachverhalt richtig wiedergibt, wie dies am Beispiel der Balmerschen Formel gezeigt werden konnte. Wichtiger für die Frage nach der Harmonie des Sonnen- und Planetensystems ist es, den mathematischen Inhalt der drei Keplerschen Gesetze im harmonikalen Sinne interpretieren zu können.

Die Frage der *Harmonie in der Natur* wird in der heutigen Wissenschaft vollkommen überlagert und bestimmt durch die Symmetrie. Dies gilt nicht nur in

1) B. L. van der Waerden, «Plimpton 322». Rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten, in: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, Basel 1966², 125ff.
2) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 4. Band: Ebene Geometrie, Berlin 1940, 190ff.
3) B. L. van der Waerden, Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie, in: Archive for History of Exact Sciences 18, Berlin 1977, 343-357; ders., Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Zürich 1979.
4) M. Vogel, Die Enharmonik der Griechen, 2 Bde., Düsseldorf 1963.
5) H. Schavernoch, Die Harmonie der Sphären. Die Geschichte der Idee des Welteneinklangs und der Seeleneinstimmung, Freiburg 1981.
6) J. Kepler, Weltharmonik, München 1973, 291; 3. Keplersches Gesetz vom 15. 5. 1618.

der Kristallographie, die allein in 32 verschiedene Symmetrieklassen aufgeteilt ist, sondern auch in anderen Zweigen der Naturwissenschaft. Es ist die Symmetrie, die ins Auge fällt, während die harmonikalen Verhältnisse der von der Natur gebildeten Körperformen sinnbildlich nur über das Ohr zu erkennen sind. Dabei ist bis heute noch nicht geklärt, welches Prinzip – Harmonie oder Symmetrie – das Ursprüngliche darstellt, obwohl sie aufs engste miteinander verwandt sind. Es ist nicht einfach, die harmonikalen Grundlagen der Natur zu erkennen und exakt zu beweisen. Bei den Kristallen und den Spektrallinien war dies nur über die *pythagoreischen Zahlen* und ihre stereometrische und harmonikale Übertragung auf das Achsenkreuz möglich. Darin liegt ihre besondere Bedeutung für ein harmonikales Naturverständnis.

Es ist in der Geschichte der Mathematik immer wieder versucht worden, das Theorem des pythagoreischen Lehrsatzes auch auf höhere Dimensionen zu übertragen. Die Unmöglichkeit der Transformierung des „Pythagoras" in die allgemeine Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für die Exponenten n größer als 2 wurde schon von FERMAT behauptet. Dies ist bekanntlich als Fermatsches Problem in die Geschichte der Mathematik eingegangen. Die Unmöglichkeit der Transformierung wurde für die Exponenten 3 und 4 von EULER (1747) bewiesen und von den Mathematikern DIRICHLET (1828), KUMMER und HILBERT (1897) auf weitere Dimensionen bzw. Exponenten ausgedehnt. Inzwischen hat man den Beweis auf Exponenten weit über 100 000 ausgeweitet, ohne ein einziges Beispiel für die ganzzahlige Lösbarkeit dieser Gleichung zu erhalten[1].

Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf den konkreten Raum der Kristalle legt die Dimensionsgröße von selbst fest. Indem nun in diesen Kristallkörpern die harmonikalen Verhältnisse direkt in eine Beziehung zum Achsenkreuz gebracht werden konnten, löste sich die Schwierigkeit der Transformierung des pythagoreischen Lehrsatzes $a^n + b^n = c^n$ $(n = 2)$ in die Dreidimensionalität auf, was gleichzeitig zu einer neuartigen Vorstellung eines *Tonraumes* führte, in dem Raum und Zeit über die Schwingungen der komplementären Intervalle eine Einheit bilden.

Die Formeln zur Bildung und Umwandlung aller pythagoreischen Zahlen in den Oktavenraum bieten hierfür die harmonikale Grundlage:

m, n als ganze Zahlen:	$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$
a–b–c als pythagoreische Zahlen:	$a^2 + b^2 = c^2$

1) P. Ribenboim, Fermat's Last Theorem, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Mannheim 1980, 75-92.

$$\frac{m}{m+n} \otimes \frac{m+n}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+c}{a+b+c} \otimes \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1}{2}$$

Intervallzahlen: $\text{Intervall}_1 \otimes \text{Intervall}_2 = \text{Oktave}$

Das Pentagondodekaeder und das Ikosaeder, wie sie in der Natur als Pyrit in sehr schönen, großen Exemplaren vorkommen, und ihre exakte Beschreibung durch R. J. HAÜY aus den Jahre 1785 bildeten den Schlüssel für diese Formeln als Einstieg in eine harmonikale Stereometrie und in die Idee der *Harmonie und Komplementarität.*

Ohne diesen realen Hintergrund der Kristallkörper wäre die Darstellung eines harmonikal strukturierten und oktavbegrenzten Tonraumes vor dem Hintergrund komplementärer Intervalle, deren verbindendes Element pythagoreische Zahlen sind, kaum möglich gewesen. Die Idee einer harmonikalen Quantelung[1] in der Natur führte so zu einer *Harmonie der Gegensätze,* die ihren Ursprung in der Einheit des Ganzen hat. Es bleibt abzuwarten, wie weit eine solche Idee sich auch in anderen Zweigen der Wissenschaft nachweisen läßt und als harmonikales Grundprinzip in der Natur verankert ist. Wenn jedenfalls in der heutigen Naturwissenschaft die Gesetze der Makrophysik (Mechanik) nicht mehr im gleichen Sinne gelten wie die Gesetze der Mikrophysik (Wellenmechanik)[2], so trifft dies sicher nicht zu für die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes in beiden Bereichen. Vielleicht ist hierin die Ursache verborgen, daß man auch heute *die Wissenschaft vom Raum immer noch als eine ungelöste Aufgabe bezeichnet*[3]. Die harmonikale Interpretation des pythagoreischen Lehrsatzes könnte hier durchaus als Schlüssel dienen, in den Raum und seine vielfältigen Ausdrucksformen einzudringen.

1) Vgl. H. Kayser, Gesetz der harmonikalen Quantelung, in: Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950, 24ff.
2) P. Jordan, Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 224; ders., Die weltanschauliche Bedeutung der modernen Physik, München 1971; W. Heisenberg, Das Naturbild der heutigen Physik, Hamburg 1955, 131.
3) M. Jammer, Das Problem des Raumes. Die Entwicklung der Raumtheorien, Darmstadt 1980^2, 240.

Kristallographische Normalreihen nach Victor Goldschmidt

		0	1/13	1/8	1/6	1/5	1/4	2/7	1/3	2/5	5/12	1/2	3/5	2/3	5/7	3/4	4/5	9/11	5/6	19/20	1	20/19	10/9	8/7	6/5	5/4	4/3	3/2	5/3	2	7/3	5/2	8/3	3	7/2	15/4	4	5	7	15/2	8	12	39/2	∞
Granat	p 0	0	.	.	.	.	.	.	1/3	2/5	.	1/2	3/5	2/3	.	.	4/5	.	.	19/20	1	20/19	.	.	.	5/4	.	3/2	5/3	2	.	5/2	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Flussspath	p 1	0	.	.	.	.	1/4	.	1/3	.	.	1/2	.	2/3	.	3/4	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	8/3	3	7/2	.	.	.	.	.	.	12	.	∞
Steinsalz	p 0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1/2	3/5	.	.	3/4	4/5	.	.	.	1	.	.	.	.	5/4	4/3	.	5/3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Kupferkies	± p 0	0	.	.	.	.	1/4	.	1/3	.	.	1/2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	.	.	.	∞
Zinnerz	p	0	.	.	.	.	1/4	.	.	.	.	.	3/5	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	6/5	.	.	.	.	2	.	5/2	.	.	.	.	.	5	7	.	.	.	.	∞
Idokras	p 0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1/2	.	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Topas	0 q	0	.	.	.	1/5	.	.	1/3	2/5	.	1/2	3/5	2/3	.	.	4/5	.	5/6	.	1	.	.	8/7	.	.	.	3/2	.	2	.	.	.	.	.	15/4	4	.	.	.	.	.	.	∞
Olivin	p 0	0	.	.	.	1/5	1/4	.	1/3	.	.	1/2	.	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	10/9	.	.	5/4	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Enstatit	0 q	0	.	.	.	.	1/4	.	.	2/5	.	1/2	3/5	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	.	5/2	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Kieselzinkerz	p 0	0	.	.	1/6	.	.	.	1/3	.	.	1/2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	4/3	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Gyps	0 q	0	.	.	.	.	.	.	1/3	.	.	1/2	.	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	.	5/2	.	3	.	.	4	.	.	.	.	.	.	∞
Kupferlasur	± p 0	0	.	1/8	.	1/5	1/4	2/7	1/3	.	.	1/2	.	.	5/7	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	5/4	.	3/2	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Datolith[1]	± p 1	0	.	.	.	.	1/4	.	.	.	.	1/2	.	.	.	3/4	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	.	5/2	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Pyroxen (Diopsid)	0 q	0	.	.	.	1/5	.	.	1/3	.	.	1/2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	5	.	.	.	.	.	∞
Axinit[2]	p 0	0	.	.	.	.	.	.	1/3	.	.	1/2	3/5	2/3	.	3/4	.	9/11	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Kupfervitriol	0 q	0	.	.	.	.	.	.	1/3	.	.	1/2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Rhodonit	0 q	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1/2	.	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Apatit	p	0	.	.	1/6	.	.	.	1/3	.	5/12	1/2	3/5	.	.	3/4	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	7/3	.	.	3	.	.	4	.	.	.	.	.	.	∞
Beryll	p	0	1/13	.	.	.	.	.	.	2/5	.	1/2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3/2	.	2	.	.	.	3	.	.	4	5	.	15/2	.	12	39/2	∞
Calcit [—2 : —2] reduc.[3]		0	.	.	.	.	1/4	.	1/3	.	.	1/2	.	2/3	.	3/4	.	.	.	.	1	.	.	.	.	5/4	.	3/2	.	2	.	5/2	.	3	.	.	4	.	.	.	8	.	.	∞
- [—2 : ∞0] -[3]		0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1/2	.	2/3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	∞
Häufigkeit		21	1	1	2	4	8	1	13	4	1	20	7	12	1	6	3	1	1	1	21	1	1	1	1	5	2	11	2	20	1	6	1	15	1	1	6	3	1	1	1	2	1	21

Aus: V. Goldschmidt, Ueber Entwicklung der Krystallformen, in: Zeitschrift für Krystallographie 28, 1897, 10

Die Entwicklung der Kristallformen
nach dem Komplikationsgesetz von Victor Goldschmidt
Ausschnitt aus seinem Buch
„Ueber Harmonie und Complication“
Berlin 1901, 3-7

Entwicklung der Krystallformen.

Krystalle sind bei ungestörter Ausbildung von ebenen Flächen bedeckt. Jede Krystallart hat ihr Formen-System, d. h. die an ihr beobachteten Flächen stehen in einem gesetzmässigen Zusammenhang, sowohl unter sich, als mit den physikalischen Eigenschaften und dem Bau des Krystalls aus, wie wir annehmen, parallel aneinander gereihten gleichen Partikeln.

Unter den Flächen, die eine Krystallart hervorbringt, und deren Zahl ist bei manchen Arten sehr gross, sind gewisse Flächen besonders wichtig durch Häufigkeit und Grösse, andre sind seltener, andre ganz selten. Mit

der Häufigkeit nimmt die Grösse und endlich die Sicherheit der Beobachtung ab. Danach haben die Flächen einer Krystallart eine bestimmte Rangordnung. Die wichtigsten nennen wir Hauptflächen, Primärflächen, auch Primärknoten mit Rücksicht auf eine Darstellung durch Projection, in der sich die Flächen als Punkte (Knoten) abbilden.

Es zeigt sich nun, dass die schwächeren (abgeleiteten) Flächen sich zwischen die Hauptflächen (Primärflächen) in bestimmter Weise einordnen. Seien A B (Fig. 1) 2 Primärflächen, so bildet sich bei fortschreitender Differenzirung eine Fläche C, die die Kante A B parallelkantig unter bestimmtem Winkel abstumpft. C ist schwächer, im Rang niederer, als A und B. Geht die Differenzirung weiter, so entstehen Flächen D, E, die die Kanten AC, BC abstumpfen. Die Flächen D und E sind schwächer als C. Bei noch weiterer Differenzirung bilden sich schwache Kanten-Abstumpfungen FGHI. Wir haben hier 3 Stadien der regelmässigen Entwicklung:

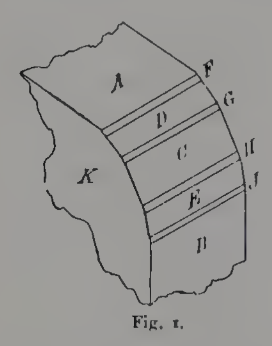


Fig. 1.

N_0 = A . . . . B
N_1 = A . . . C . . . B
N_2 = A . D . C . E . B
N_3 = A F D G C H E I B

Meist geht die Entwicklung nur bis N_1, oft bis N_2, selten bis N_3 und äusserst selten darüber hinaus. Die zwischen 2 Primärflächen entwickelten (abgeleiteten) Flächen bilden mit diesen eine Zone (Primärzone), charakterisiert durch parallele Kanten. Die erste abgeleitete Fläche C, die wichtigste, nennen wir Dominante, wenn zwischen 2 Primärflächen: Primärdominante.

Die gleiche Entwicklung kann sich an der Kante zwischen 2 anderen Primärflächen vollziehen z. B. zwischen AK oder BK (Fig. 1). Wir sagen: es spannen sich Primärzonen AB, AK, BK zwischen den Primärflächen (Primärknoten) A, B, K. Weitere Differenzirung bringt Zonen zwischen je einer Primärfläche und einer Primärdominante z. B. CK (Secundärzonen); dann zwischen je 2 Primärdominanten (Tertiärzonen). Die beiden Flächen, zwischen denen eine Zone sich spannt, nennen wir die Endknoten der Zone. Auch die Zonen haben ihre Rangordnung. Mit dieser Entwicklung ist ein grosser Formenreichtum geschaffen, besonders, wenn die Zahl der Primärflächen gross ist und die Differenzirung in den Zonen weit geht, bis N_2 oder N_3. In jeder Zone folgt die Anordnung der Flächen einem bestimmten Zahlengesetz, das für alle Zonen aller Krystallarten das gleiche ist. Wir nennen es das Gesetz der Complication. Es regelt den Ort resp. die Neigung der Einzelflächen, ihre Grösse und Rangordnung und gestattet, nicht beobachtete Flächen als wahrscheinlich vorherzusagen, beobachtete auf ihre Wahrscheinlichkeit zu prüfen.[1])

[1]) Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 1897. **28.** S. 32—35. S. 426. 446. 1900. **33.** 441—446.

Ersetzen der Flächen durch ihre Normalen. Auffassung der Normalen als Richtungen der Partikelkräfte. Zwischen den Flächen und den krystallbauenden parallelgestellten Theilchen (Partikel) besteht eine Beziehung. Die hypothetisch eingeführte Beziehung sei die, dass jede am Krystall mögliche Fläche senkrecht steht zu einer der Partikelkräfte. Der Partikel schreiben wir Primärkräfte zu von bestimmter Richtung und Intensität, und nehmen an, die Primärkräfte der Partikel (und zwar aller, da die Partikel parallel orientiert im Krystall sitzen) stehen senkrecht auf den Primärflächen. Wir ersetzen die Flächen durch ihre Normalen (Senkrechten zu den Flächen) aus einem Punkt innerhalb des Krystalls und haben so die Richtungen der flächenbauenden Partikelkräfte. An Stelle der Primärflächen treten Primärkräfte, an Stelle der abgeleiteten Flächen, abgeleitete Kräfte. Die Krystallmessung giebt, indem sie die Lage der Flächen ermittelt, die Richtung der Partikelkräfte. Wir können aber auch deren relative Intensität finden.

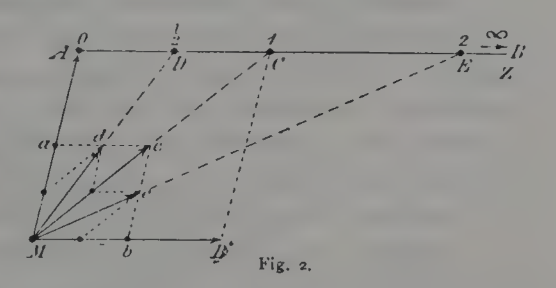


Fig. 2.

Deduction der Flächen einer Zone aus den Primärkräften. Seien A, B (Fig. 2) die Primärkräfte, die senkrecht zu sich die Flächen A, B (Fig. 1) bilden, so ist genetisch das empirisch gefundene Gesetz der Entwicklung folgendes: Die Kräfte A, B zerfallen in 2 Hälften, von denen die einen a, b sich zur Resultante c zusammenlegen. Zu c senkrecht entsteht die Fläche C. Wiederholt sich der Process, so tritt $\frac{1}{2}$a mit $\frac{1}{2}$c zusammen zu einer Resultante d, ebenso $\frac{1}{2}$b und $\frac{1}{2}$c zu e. Bei nochmaliger Wiederholung des Processes schieben sich weitere, schwächere Resultanten zwischen ad, dc, ce, eb ein etc. So finden wir Richtung und Intensität der abgeleiteten Kräfte, dadurch Ort und Rangordnung der abgeleiteten Flächen. Die Flächen stehen senkrecht zu den Kräften, die Rangordnung entspricht der relativen Intensität.

Zahlengesetz der Complication. Wir ziehen durch A parallel B eine Gerade AZ (Fig. 2) und verlängern Ma, Md, Mc, Me, Mb bis zum Durchstich mit AZ, so sind die Richtungen Ma, Md, Mc, Me, Mb charakterisirt durch die Durchstichpunkte A, D, C, E, B. B liegt im Unendlichen. Setzen wir nun $AC = MB' = 1$ = der Primärkraft in Richtung MB, so ist, wie sich zeigen lässt, $AD = \frac{1}{2}$, $AC = 1$, $AE = 2$, $AB = \infty$. Das Durchstechen der Geraden AZ nennen wir projiziren, die Durchstichpunkte Projectionspunkte. Die Projectionspunkte charakterisiren die Lage der Flächen, ihr Ort ist gegeben durch die Zahlen $0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \infty$. Diese Zahlen nennen wir die harmonischen Zahlen, ihre Reihe harmonische Zahlenreihe und, wenn lückenlos, Normalreihe. In den Normalreihen und harmonischen Zahlen drückt sich unser Entwicklungsgesetz aus. Wir haben:

Primärflächen:	A	·	·	·	·	·	·	·	B	
$N_0 =$	0	·	·	·	·	·	·	·	∞	= Normalreihe 0.
1. Complication:	A	·	·	·	C	·	·	·	B	
$N_1 =$	0	·	·	·	1	·	·	·	∞	= Normalreihe 1.
2. Complication:	A	·	D	·	C	·	E	·	B	
$N_2 =$	0	·	$\frac{1}{2}$	·	1	·	2	·	∞	= Normalreihe 2.
3. Complication:	A	F	D	G	C	H	E	I	B	
$N_3 =$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞	= Normalreihe 3.

u. s. w.

Es ist klar, wie die Reihe bei einer 4., 5. Complication aussehen würde. Aber die Natur geht, mit seltenen Ausnahmen, über N_3 nicht hinaus.

Umformung einer Reihe auf die Form 0 · 1 · ∞. Die Zahlenreihe einer Zone zeigt nur dann zwischen $0 \cdot \infty$ den gesetzmässigen Verlauf, wenn die Punkte $0 \cdot \infty$ den Endknoten des Zonenstücks zugehören. Kennen wir die Endknoten, so können wir ihnen die Zahlen $0 \cdot \infty$ beilegen und aus den Zwischenzahlen beurtheilen, ob die Reihe normal oder gestört ist. Umgekehrt erkennen wir die Endknoten als solche daran, dass die Reihe normal wird, d. h. unserem Zahlengesetz folgt, wenn wir die Endknoten $0 \cdot \infty$ nennen.

Stehen nun an den Endknoten, in Folge vorheriger anderweiter Annahme, nicht $0 \cdot \infty$, sondern andere Zahlen $z_1 \cdot z_2$, so können wir die Reihe in die Form $0 \cdot \infty$ bringen, indem wir statt jeder Zahl z der Reihe setzen:

$$p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

Beispiel. Es sei eine Reihe gefunden:

Flächen:	A	D	C	E	B
$z =$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2

und wir vermuthen, A und B seien die Endknoten, so ist in obiger Formel $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ und wir bilden:

$$p = \frac{z - 1}{2 - z} = 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad \infty = N_2$$

Wir erkennen, dass nach dieser Umformung die Reihe den gesetzmässigen Verlauf hat, und aus dem gesetzmässigen Verlauf schliessen wir umgekehrt, dass in der That, wie wir vermuteten, AB die Endknoten der Entwicklung sind.

Die Rangordnung der Flächen zeigt sich in der Einfachheit der Zahlen in der Reihe $0 \cdot 1 \cdot \infty$.

Den höchsten Rang haben 0 ∞
dann 1
dann $\frac{1}{2}$ 2
dann $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ 3
. . . .

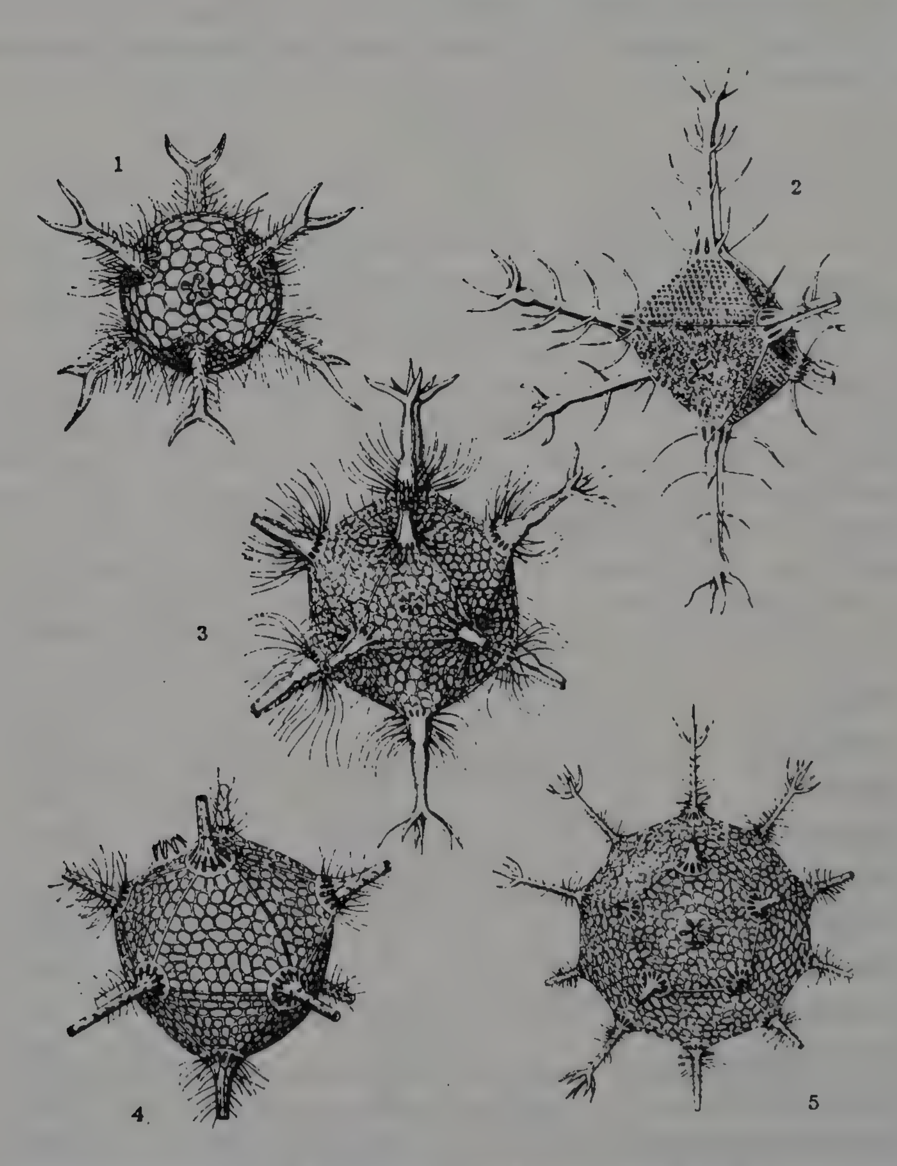
Aus der Entwicklung in allen einzelnen Zonen (Primärzonen, Secundärzonen, Tertiärzonen u. s. w.), ausgehend von den Primärflächen, setzt sich das Formensystem einer Krystallart zusammen.

Das ist in grossen Zügen ein Bild von der Entwicklung der Formen, wie wir es bei den Krystallen aller Systeme und jeder beliebigen Zusammensetzung finden.

Eulersche Formel: $F + E - K = 2$

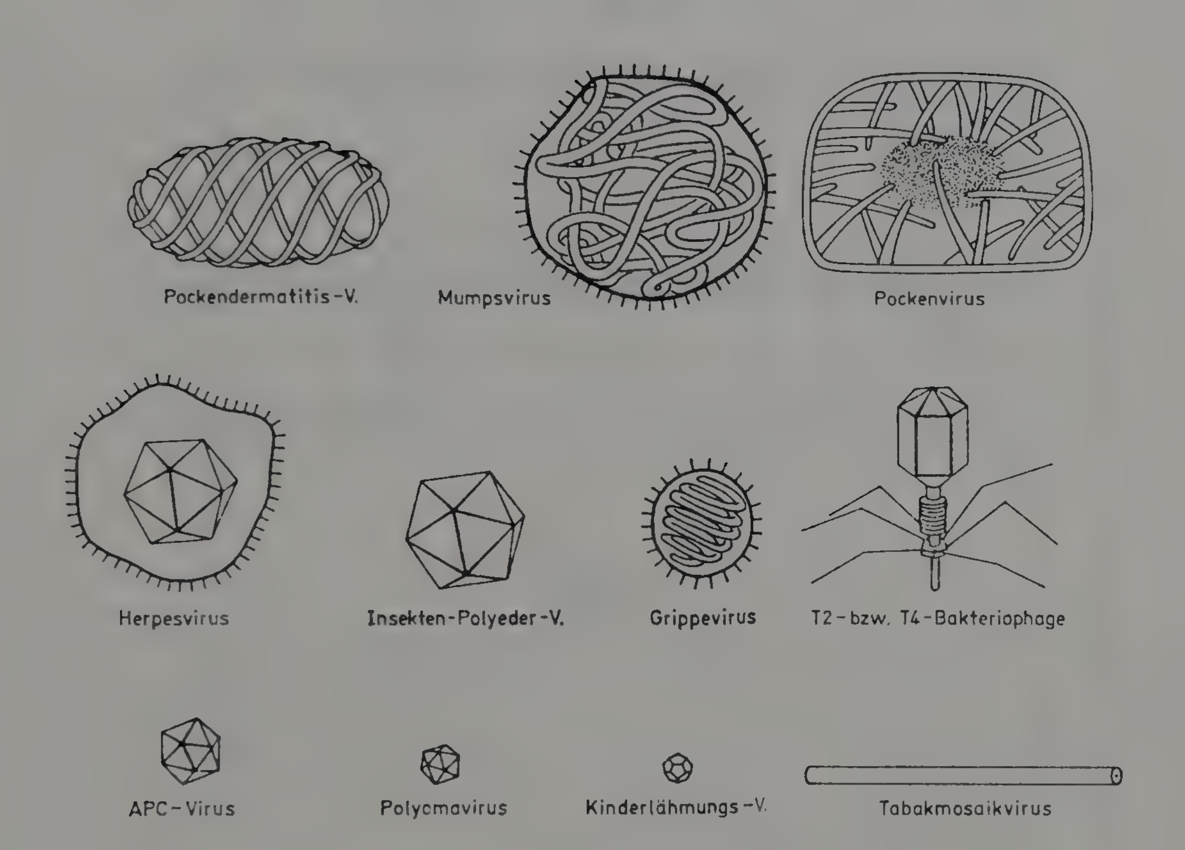
	Flächen	Ecken	Kanten
Würfel	6	8	12
Tetraeder	4	4	6
Oktaeder	8	6	12
Rhombendodekaeder	12	14	24
Pyramidenwürfel	24	14	36
Pentagondodekaeder	12	20	30
Ikosaeder	20	12	30
Pyramidenoktaeder	24	14	36
Deltoiddodekaeder	12	14	24
Ikositetraeder	24	26	48
Pyramidentetraeder	12	8	18
Hexakisoktaeder	48	26	72
Disdodekaeder	24	26	48
Pentagonikositetraeder	24	38	60
tetraedr. Pentagondodekaeder	12	20	30
Hexakistetraeder	24	14	36

Skelette verschiedener Radiolarien



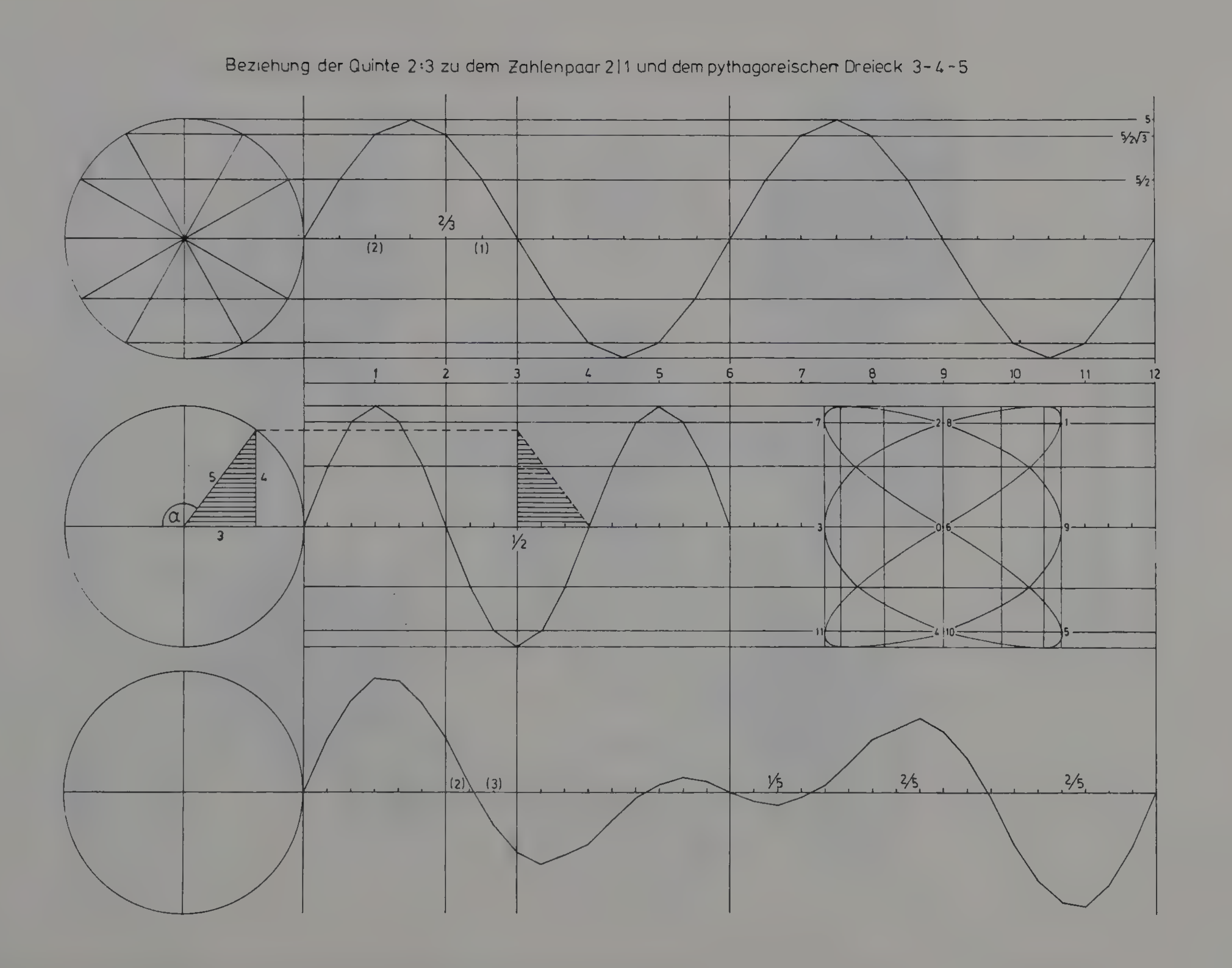
1 Circoporus sexfurcus; 2 C. octahedrus; 3 Circogonia icosahedra; 4 Circospathis novena; 5 Circorrhegma dodecahedra. Aus: D'Arcy Wentworth Thompson, Über Wachstum und Form, Basel 1966, 209 (nach Haeckel)

Die Struktur einiger Viren



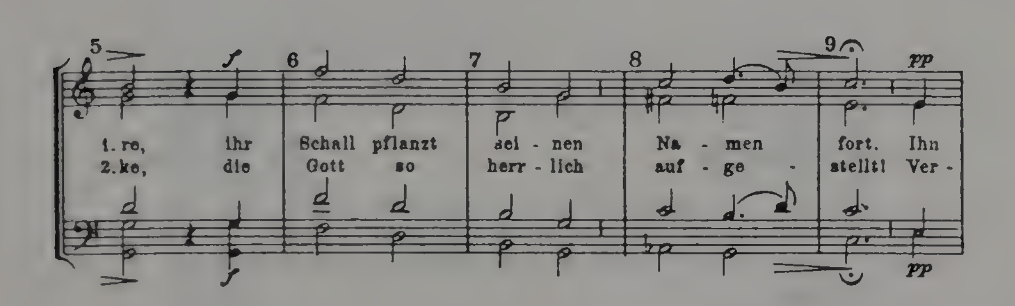
Relative Größe und Gestalt einiger Viren
nach R. W. Horne, The Structure of Viruses, in:
Scientific American 208, 1963, 48-56

Beziehung der Quinte 2:3 zu dem Zahlenpaar 2|1 und dem pythagoreischen Dreieck 3-4-5



L. van BEETHOVEN, Die Ehre Gottes in der Natur, Takt 1-9

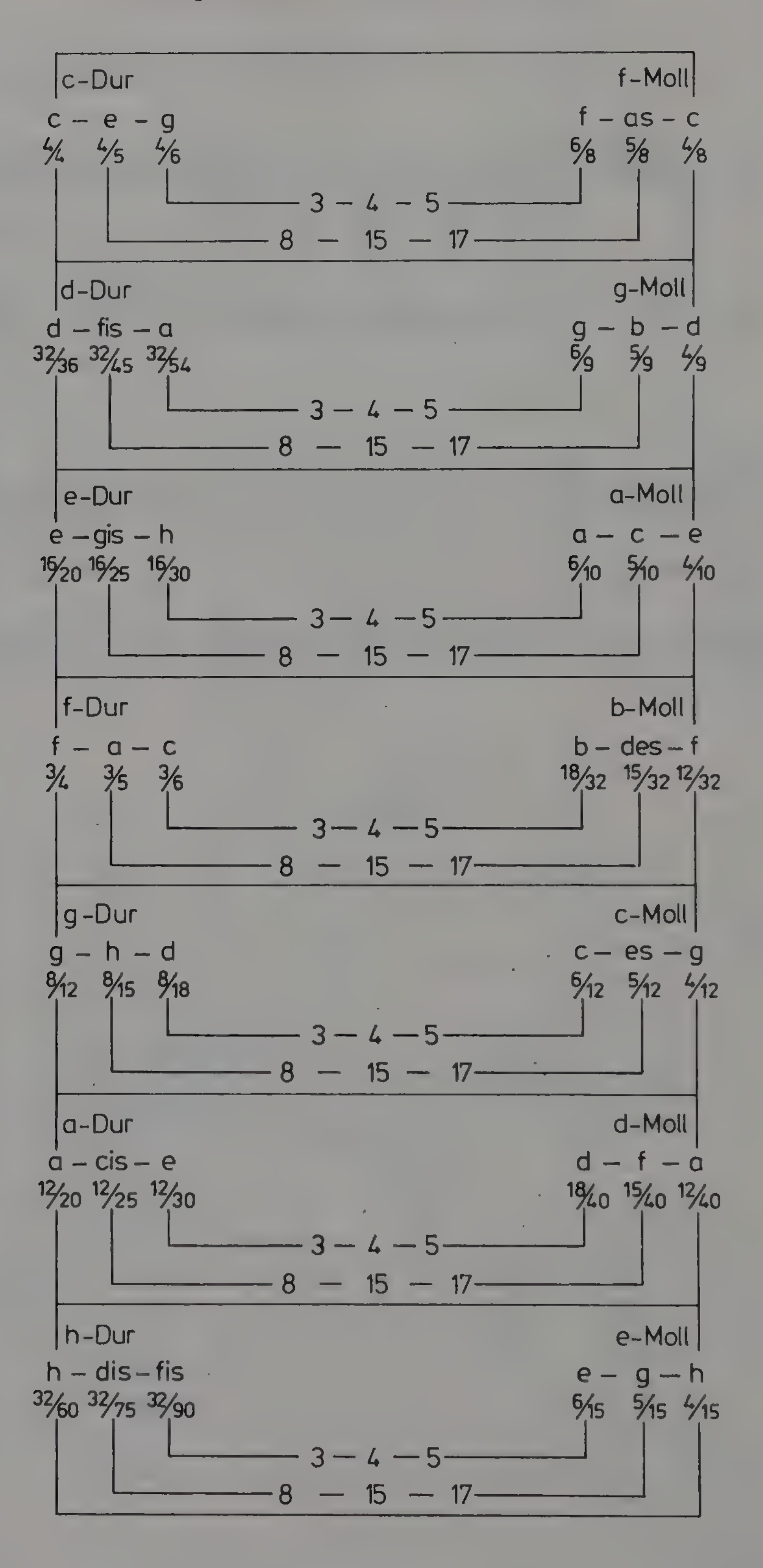




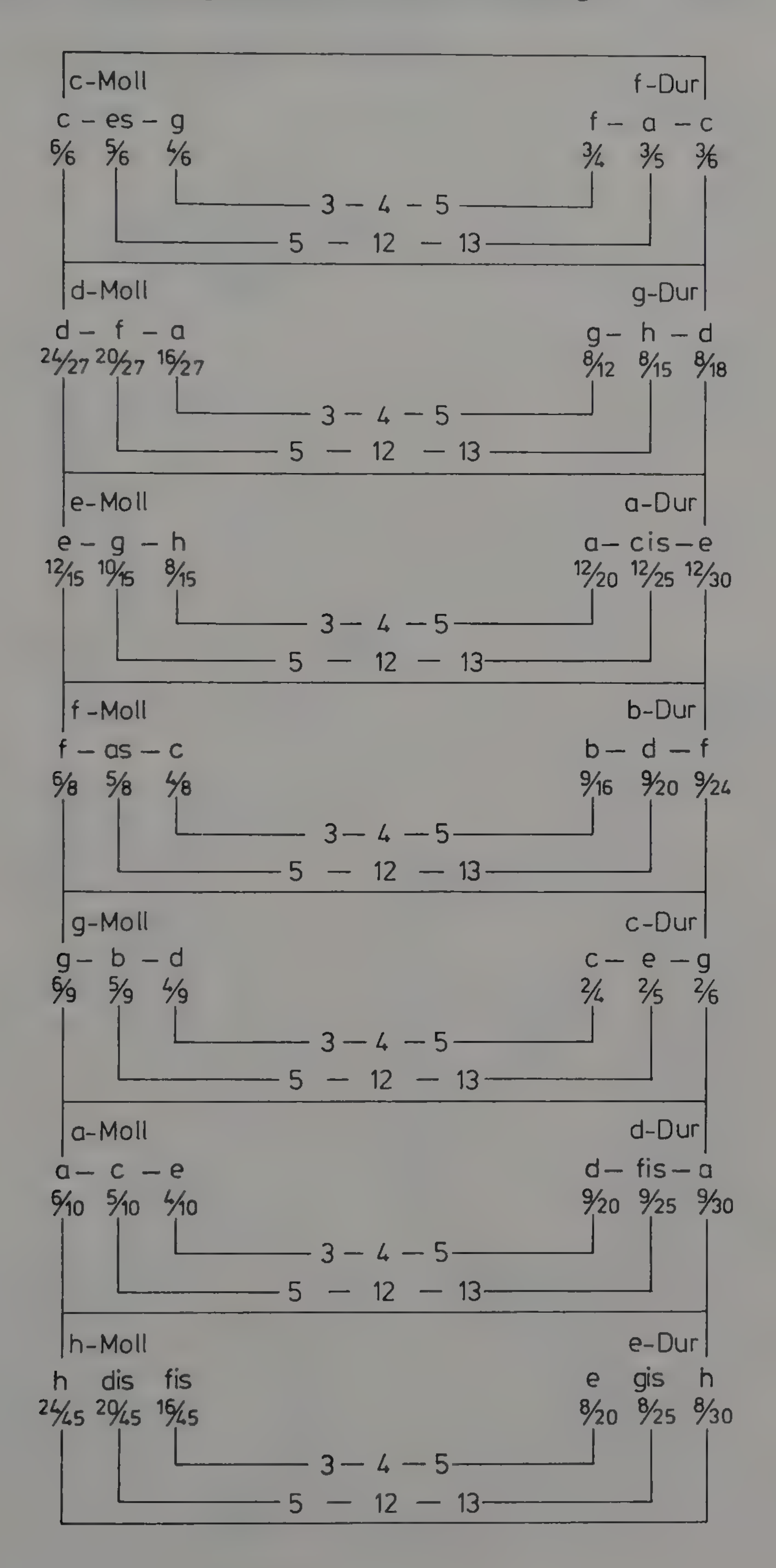
	Die	*Him-*	*mel*	*rüh-*	*men*	*des*	*E-*	*wi-*	*gen*	*Eh-*	*re,*
Schwingungs-zahlen:						5	5	9/2	4	4	15/4
	3	4	3	5/2	2	3	3	3	3	3	3
						2	2	21/16	5/4	5/4	9/4
	3/2	2	3/2	5/4	1	1	1	15/16	1	3/2	3/4

ihr	*Schall*	*pflanzt*	*sei-*	*nen*	*Na-*	*men*		*fort.*
	16/3	9/2	15/4		4	9/2	15/4	4
3	8/3	9/4	15/8	3	14/5	21/8		5/2
3/2	8/3	9/4	15/8	3/2	2	15/8	9/4	2
3/4	4/3	9/8	15/16	3/4	4/5	3/4		1

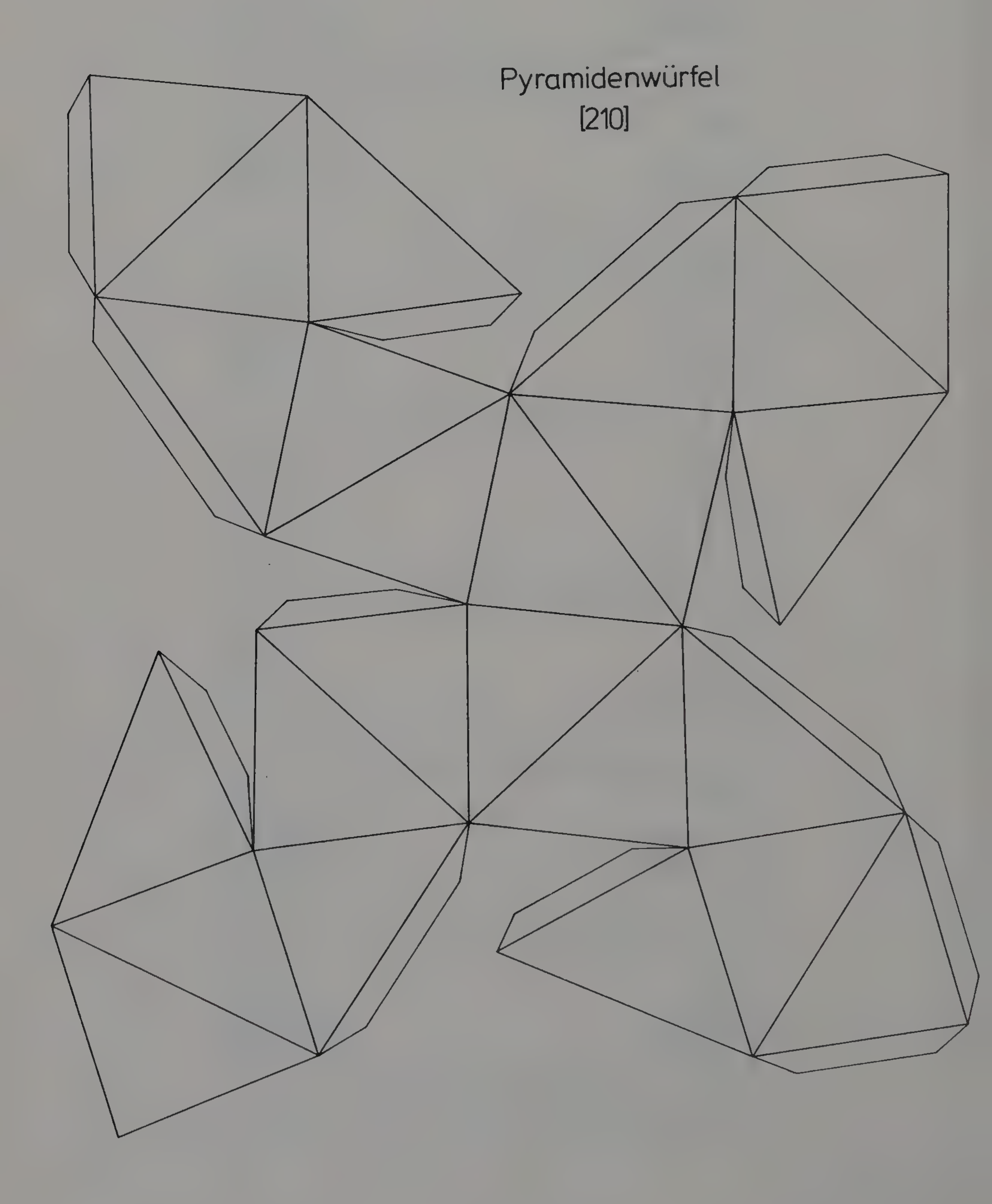
Komplementäre Dur-Moll-Dreiklänge

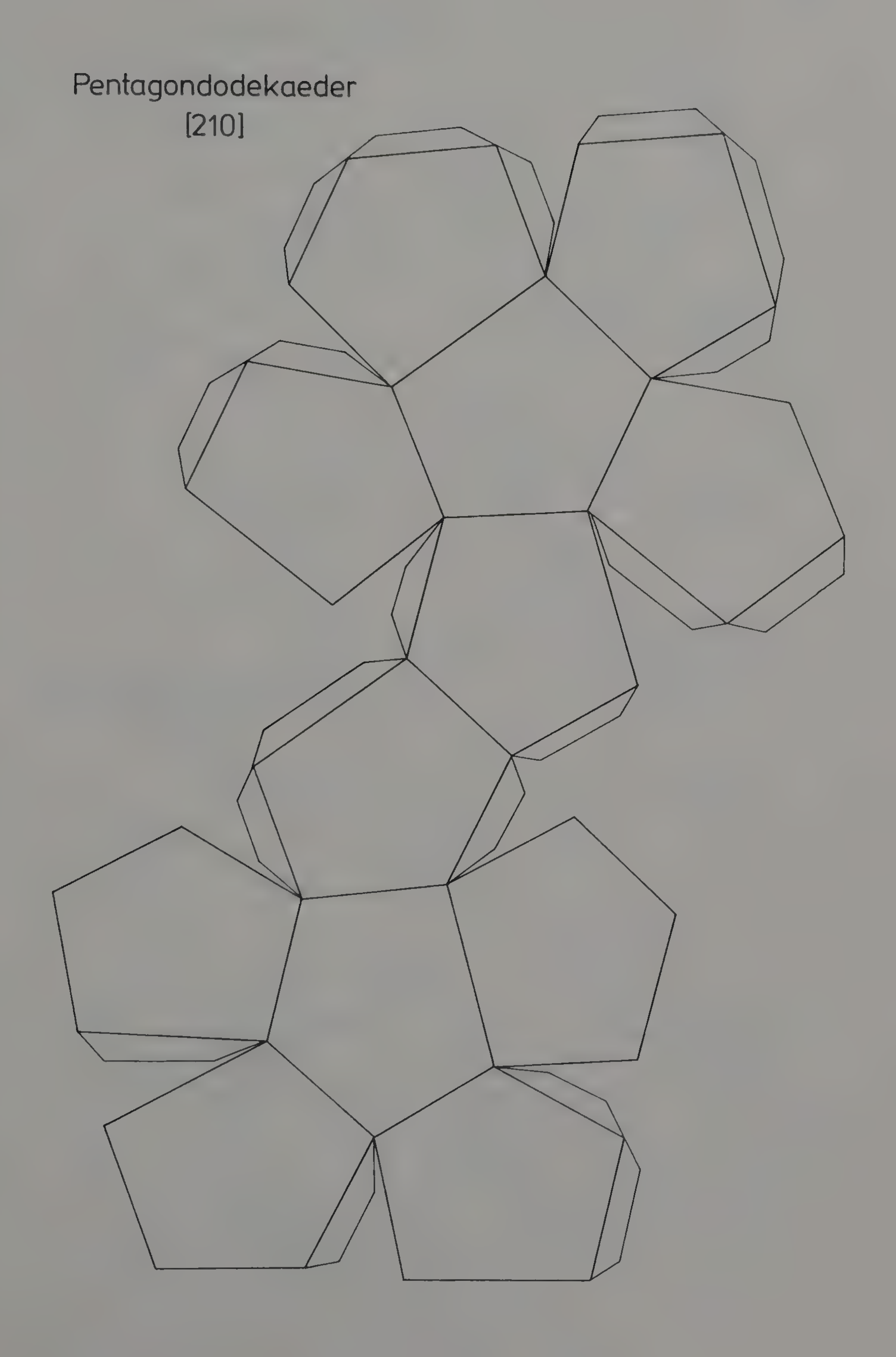


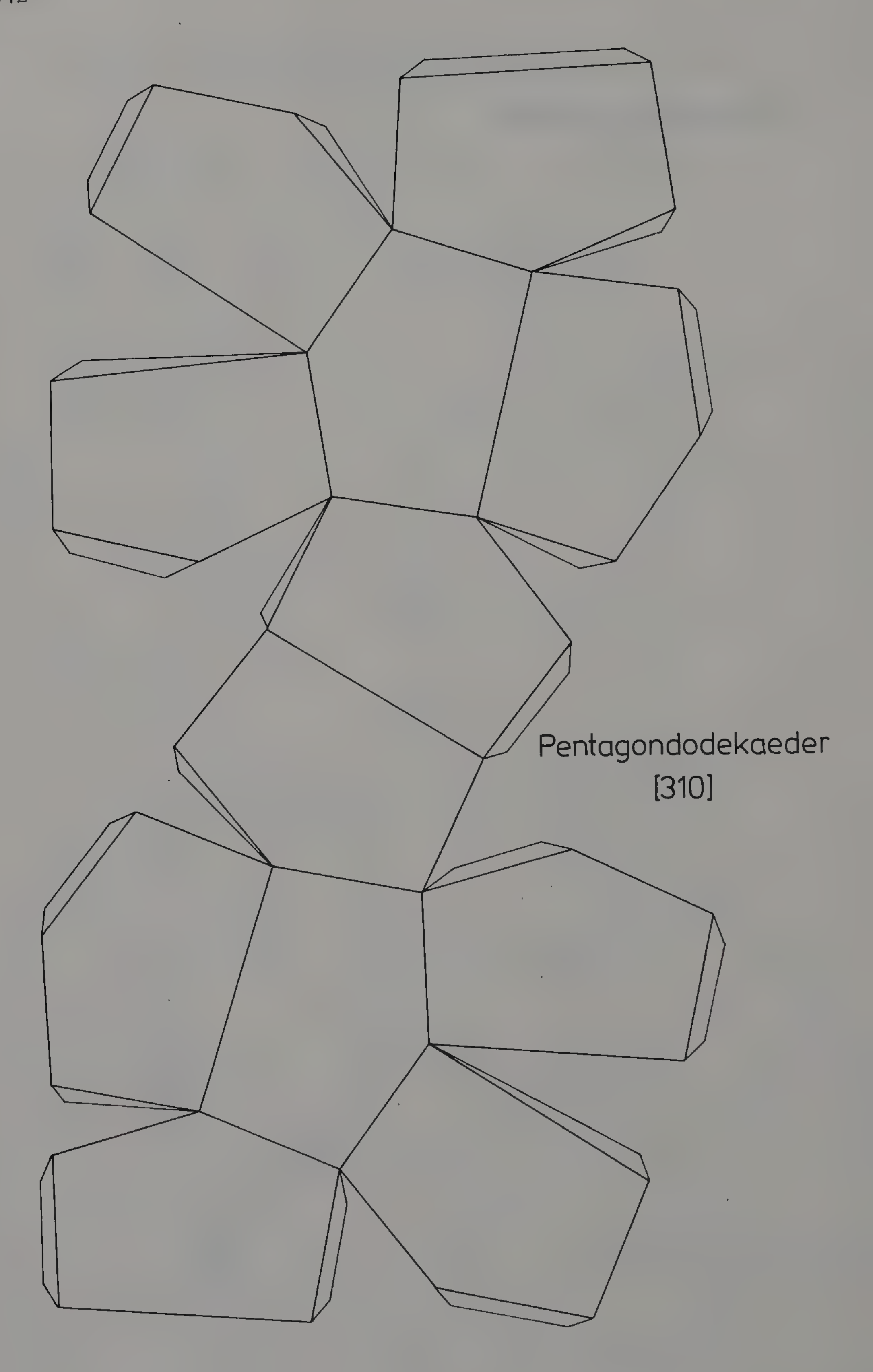
Komplementäre Moll-Dur-Dreiklänge

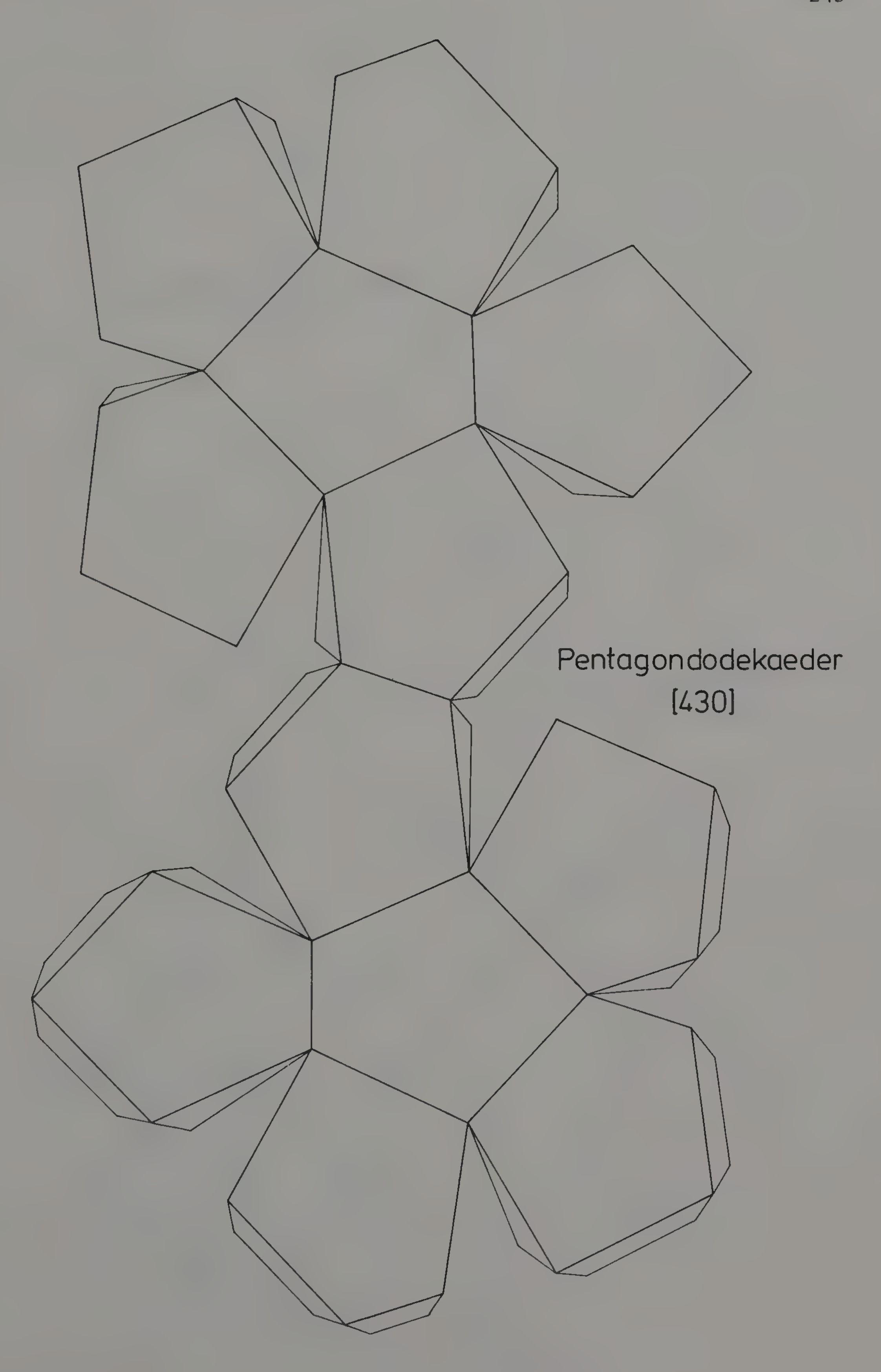


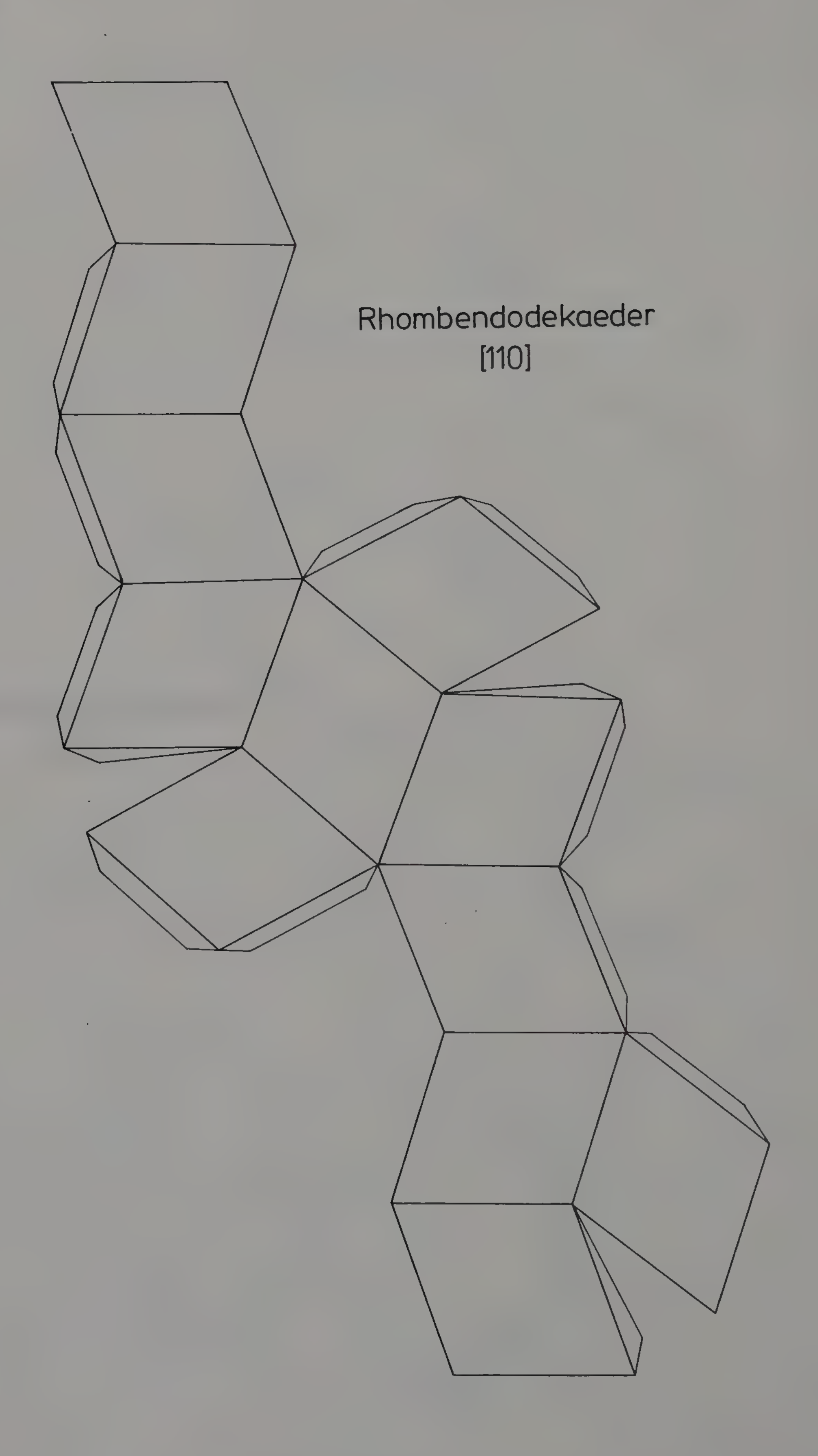
Modellnetze ausgewählter Kristallkörper des kubischen Systems
(zum Selbstbau)

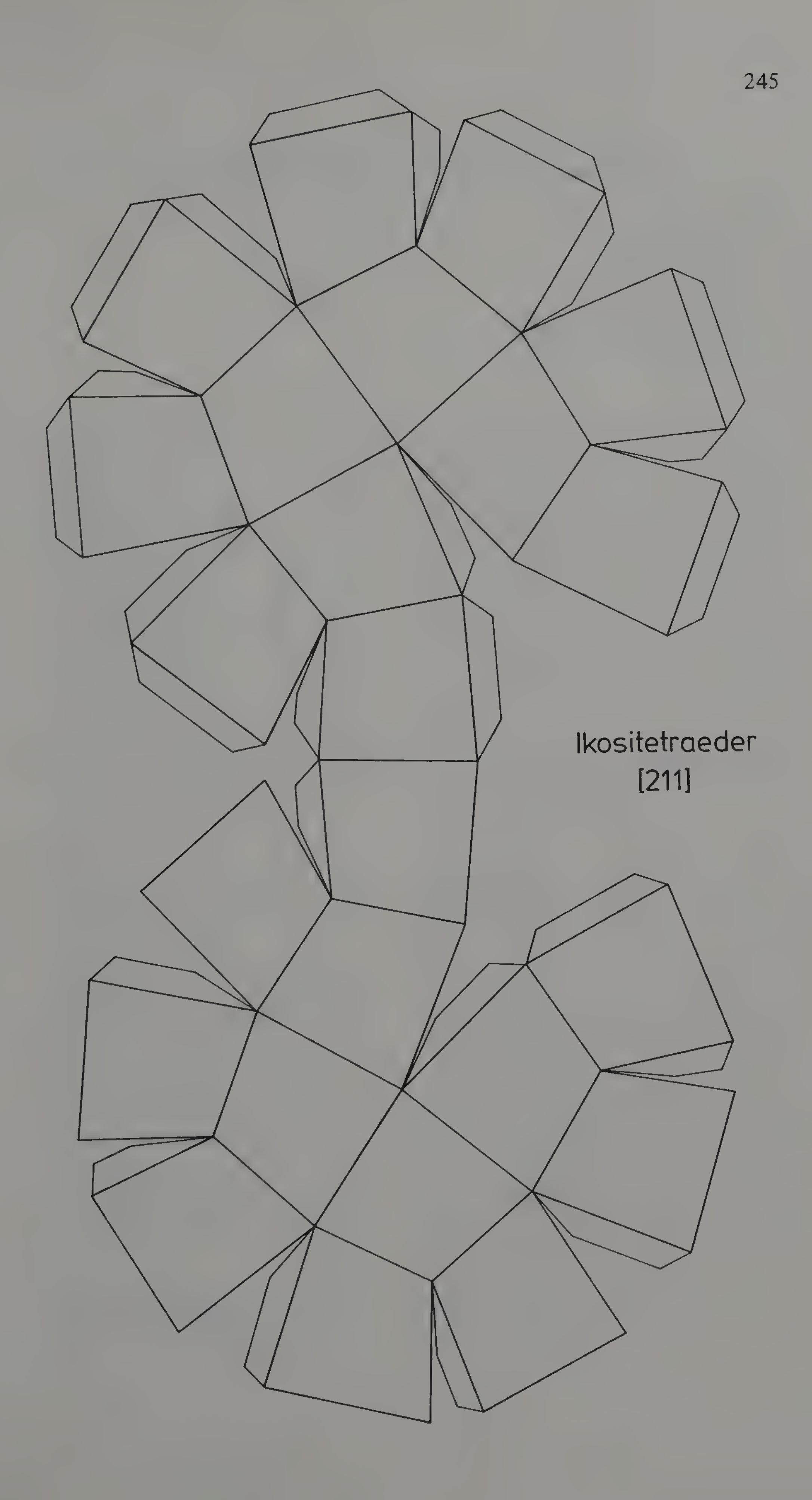



Pentagondodekaeder
[210]


Pentagondodekaeder
[310]


Pentagondodekaeder
[430]


Rhombendodekaeder
[110]


Ikositetraeder
[211]

Zahlenpaare – pythagoreische Zahlen – Intervalle

a b Zahlenpaare m/n
c Kathete $m^2 - n^2$
d Kathete 2mn
e Hypotenuse $m^2 + n^2$
f Ordnung der Intervalle m/(m + n) nach der Hypotenusengröße

a	b	c	d	e	f
2	1	3	4	5	2/3
3	1	8	6	10	3/4
3	2	5	12	13	3/5
4	1	15	8	17	4/5
4	3	7	24	25	4/7
5	1	24	10	26	5/6
5	2	21	20	29	5/7
5	3	16	30	34	5/8
6	1	35	12	37	6/7
5	4	9	40	41	5/9
7	1	48	14	50	7/8
7	2	45	28	53	7/9
7	3	40	42	58	7/10
6	5	11	60	61	6/11
7	4	33	56	65	7/11
8	1	63	16	65	8/9
8	3	55	48	73	8/11
7	5	24	70	74	7/12
9	1	80	18	82	9/10
7	6	13	84	85	7/13
9	2	77	36	85	9/11
8	5	39	80	89	8/13
9	4	65	72	97	9/13
10	1	99	20	101	10/11
9	5	56	90	106	9/14
10	3	91	60	109	10/13
8	7	15	112	113	8/15
11	1	120	22	122	11/12
11	2	117	44	125	11/13
9	7	32	126	130	9/16
11	3	112	66	130	11/14
11	4	105	88	137	11/15
9	8	17	144	145	9/17
12	1	143	24	145	12/13
11	5	96	110	146	11/16
10	7	51	140	149	10/17
11	6	85	132	157	11/17
12	5	119	120	169	12/17
11	7	72	154	170	11/18
13	1	168	26	170	13/14
13	2	165	52	173	13/15
13	3	160	78	178	13/16
10	9	19	180	181	10/19
11	8	57	176	185	11/19
13	4	153	104	185	13/17
12	7	95	168	193	12/19
13	5	144	130	194	13/18
14	1	195	28	197	14/15
11	9	40	198	202	11/20
13	6	133	156	205	13/19
14	3	187	84	205	14/17
13	7	120	182	218	13/20
11	10	21	220	221	11/21
14	5	171	140	221	14/19
15	1	224	30	226	15/16
15	2	221	60	229	15/17
13	8	105	208	233	13/21
15	4	209	120	241	15/19
13	9	88	234	250	13/22
16	1	255	32	257	16/17
12	11	23	264	265	12/23
16	3	247	96	265	16/19
13	10	69	260	269	13/23
15	7	176	210	274	15/22

VERZEICHNIS DER ZITIERTEN AUTOREN

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS Carl, Die harmonischen Verhältnisse, Winterthur 1845
ADLER Guido, Studie zur Geschichte der Harmonie, Wien 1881
AHLVERS Arthur, Zahl und Klang bei Platon, Bern 1952
AIGNER A., Zahlentheorie, Berlin 1975
AIRY G. B., Integer Numbers of the First Centenary, Satisfying the Equation $A^2 = B^2 + C^2$, in: Nature 33, 1886, 532
– On Sound and Atmospheric Vibrations with the Mathematical Elements of Music, London 1868
AMSTUTZ G. C., Symmetrie in Natur und Kunst, in: Der Aufschluß 6, 1966, 143-156
– Victor Goldschmidt, in: Dictionary of Scientific Biography 5, New York 1981, 455-456
ANGEL Franz, Harmonie und Kristalle, in: Joanneum. Mineralogisches Mitteilungsblatt 2/1951, 17-27
ARISTOXENUS: Die harmonischen Fragmente des Aristoxenus, hg. von Paul Marquard, Berlin 1868
ASSER Günther, Grundbegriffe der Mathematik, I: Mengen, Abbildungen, Natürliche Zahlen, Berlin 1975
ATTELN Horst, Das Verhältnis Musik – Mathematik bei Johannes Kepler. Ein Beitrag zur Musiktheorie des frühen 17. Jahrhunderts, Erlangen–Nürnberg 1970 (1971)
BACHMANN P., Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung, Berlin 1919
BACKHAUS H., Theorie akustischer Schwingungen, in: Handbuch der Physik Band 8, Berlin 1927, 5-150
BAHIER Eugène, Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers, Paris 1916
BALMER Heinz, Johann Jakob Balmer, in: Elemente der Mathematik 16, 1961, 49-60
BALMER Johann Jakob, Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs, in: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel 7, 1884, 548-560, 750-752; Annalen der Physik und Chemie 25, 1885, 80-87

(Balmer) Eine neue Formel für Spektralwellen, in: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel 11, 1897, 448-460, Tafel VI; Annalen der Physik und Chemie 60, 1897, 380-391, Tafel II; The Astrophysical Journal 5, 1897, 199-209
– Die Naturforschung und die moderne Weltanschauung, Basel 1868
– Zur Projektion des Kreises, Basel 1884
BALTZER R., Elemente der Mathematik, 2 Bde., Leipzig 1872
BANET Leo, Evolution of the Balmer Series, in: American Journal of Physics 34, 1966, 496-503
– Balmer's Manuscripts and the Construction of his Series, ebenda 38, 1970, 821-828
BANKOFF L. und TRIGG C. W., The Ubiquitous 3:4:5 Triangle, in: Mathematics Magazine 47, 1974, 61-70
BARAVALLE H. v., Die Geometrie des Pentagramms und der Goldene Schnitt, Stuttgart 1950
BAUER Heinz, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Berlin 1966
BAUMHAUER H., Untersuchungen über die Entwicklung der Krystallflächen im Zonenverbande, in: Zeitschrift für Krystallographie 38, 1904, 628-655
BEAU O., Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatz, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik 38, 1893, 383-384
BECKENKAMP J., Statische und kinetische Kristalltheorien, Berlin 1913
BECKER Oskar, Die Aktualität des pythagoreischen Gedankens, in: Dasein und Dawesen. Gesammelte philosophische Aufsätze, Pfullingen 1963, 127-156
– Frühgriechische Mathematik und Musiklehre, in: Archiv für Musikwissenschaft 14, 1957, 156-164
– Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1966[2]
– Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, München 1954
– Über die Lehre vom Geraden und Ungeraden im IX. Buch der Euklidischen Elemente, in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, 125-145
– Die apriorische Struktur des Anschauungsraumes, in: Philosophischer Anzeiger 4, 1930, 129-162
BEILER Albert, Recreations in the Theory of Numbers, New York 1964
BERGMANN Ludwig, Schwingende Kristalle, Stuttgart 1953
– Der Ultraschall, Stuttgart 1949[5]
BEYER Paul, Vorgeschichte des Dur-Moll, Kassel 1958
BIEBERACH Ludwig, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel 1952
BIELITZ Mathias, Musik und Grammatik. Studien zur mittelalterlichen Musiktheorie, München 1977
BINDEL Ernst, Die Zahlengrundlagen der Musik im Wandel der Zeiten, 3 Bde.,

(Bindel) Stuttgart 1950/53
– Harmonien im Reiche der Geometrie, Stuttgart 1964
– Die geistigen Grundlagen der Zahlen, Stuttgart 1958
BLASCHKE Wilhelm, Griechische und anschauliche Geometrie, München 1953
BLOCH Ernst, Über das mathematische und dialektische Wesen in der Musik, in: Zur Philosophie der Musik, Frankfurt/Main 1974, 267-279
BLOCH Kurt F., Das Prinzip der Harmonie, Kastellaun 1979
BOCK Franziska Karoline, Das Gesetz der Harmonie. Das Urgeheimnis der Natur, Wien 1948
BÖSENBERG Friedrich, Harmoniegefühl und Goldener Schnitt. Die Analyse der Klangfarbe, Leipzig 1911
BOHR Niels, Über die Quantentheorie der Linienspektren, Braunschweig 1923
– Atomtheorie und Naturbeschreibung, Berlin 1931
– On the Notions of Causality and Complementarity, in: Dialectica 2, 1948, 312-319
– Drei Aufsätze über Spektren und Atombau, Braunschweig 1922
– Atomphysik und menschliche Erkenntnis, Braunschweig 1964
BORN Max, Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin 1922[3]
– Erinnerungen an Max von Laues Entdeckung der Beugung von Röntgenstrahlen durch Kristalle, in: Zeitschrift für Kristallographie 112, 1959, 1-3
BOURBAKI Nicolas, Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen 1971
BRAGG W. L., Die Struktur einiger Kristalle, gedeutet nach ihrer Beugung von Röntgen-Strahlen, in: Zeitschrift für anorganische Chemie 90, 1915, 185-218
– Erforschung der Mineralwelt durch Roentgenstrahlen, in: Nature 134, 1934
– Die Welt des Lichtes, Braunschweig 1935
BRANDMÜLLER Josef, Zum Symmetriebegriff und seiner Bedeutung für Naturwissenschaft und Kunst, in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 35, 1982, Heft 1, 1-13
BRAVAIS Auguste, Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum verteilten Punkten (= Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 90), 1897
BREIDENBACH Walter, Das Delische Problem, Stuttgart 1953[3]
BRETSCHNEIDER C. A., Die Geometrie und die Geometer vor Euklid, Leipzig 1870
BRÜCKNER Max, Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900
BRUINS E. M., Pythagorean Triads in Babylonian Mathematics. The Errors on Plimpton 322, in: Sumer 11, 1956, 117-121
– Reciprocals and Pythagorean Triads, in: Physis 9, 1967, 373-392
– Die Chemie des Timaios, in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, hg. von O. Becker, Darmstadt 1965, 255-270
BRUNES Tons, The Secret of Ancient Geometry, 2 Bde., Kopenhagen 1967
BUERGER Martin J., Kristallographie, Berlin 1977

(Buerger) The Law of Complication, in: The American Mineralogist 21, 1936, 702-714
BURKE J. G., Origins of the Science of Crystals, Los Angeles 1966
BURKERT Walter, Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon, Nürnberg 1962
CANTOR Max, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1900-1908; Nachdruck Stuttgart 1965
– Das pythagoreische Dreieck, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik 4, 1859, 306-309
CARNAP R., Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft, München 1969
– Der logische Aufbau der Welt, Hamburg 1961
CASSELS John W., An Introduction to the Geometry of Numbers, Berlin 1959
CHARGAFF Erwin, Unbegreifliches Geheimnis. Wissenschaft als Kampf für und gegen die Natur, Stuttgart 1980
– Das Feuer des Heraklit. Skizzen aus einem Leben vor der Natur, Stuttgart 1979
COXETER H. S. M., Unvergängliche Geometrie. Wissenschaft und Kultur, Basel 1963
– Music and Mathematics, in: The Canadian Music Journal 6, 1962, 13-24; Mathematics Teacher 61, 1968, 312-320
– Regular Polytopes, New York 1973
CRAMER C., Systematische Zusammenstellung von 93 Konstruktionen für ebenso viel verschiedene Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, Frankfurt/Main 1837
CYON E. v., Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit, Berlin 1908
DAHLHAUS Carl, Harmonie und Harmonietypen, in: Studium Generale 19, 1966, 51-58
– „Reine“ oder adäquate Stimmung, in: Archiv für Musikwissenschaft 39, 1982, 1-18
– Die Termini Dur und Moll, ebenda 12, 1955, 281-296
DEDEKIND R. Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig 1930
DELONE D., Theorie der regulären Teilungen der Räume, in: Acta Crystallographica 21, 1966, A 30ff
DICKSON Leonhard Eugene, History of the Theory of Numbers, Band 2, Washington 1919; Nachdruck New York 1966
DIELS H. und KRANZ W., Die Fragmente der Vorsokratiker, Zürich–Berlin 1964[11]
DRÄGER Hans Heinz, Begriff des Tonkörpers, in: Archiv für Musikwissenschaft 9, 1952, 68ff
DREYER Ernst-Jürgen, Versuch, eine Morphologie der Musik zu begründen.

(Dreyer) Mit einer Einleitung über Goethes Tonlehre, Bonn 1976
DÜRING Ingemar, Ptolemaios und Porphyrios über die Musik, Göteborg 1934
EICHHORN A., Der akustische Maßstab, Halle 1903
EIGEN Manfred und WINKLER Ruthild, Das Spiel. Naturgesetze steuern den Zufall, München 1978[3]
EINSTEIN Albert, Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Braunschweig 1954[16]
– Geometrie und Erfahrung (1921), in: Geometrie, hg. von Karl Strubecker (= Wege der Forschung 177), Darmstadt 1972
– Quanten-Mechanik und Wirklichkeit, in: Die Idee der Komplementarität, redigiert von W. Pauli, Dialectica 2, 1948, Nr. 3/4, 320ff
EITZ Carl, Das mathematisch-reine Tonsystem, Leipzig 1891
EMCH, H, Mathematik in der Natur, Zürich 1922
ENGEL Gustav, Das mathematische Harmonium. Ein Hülfsmittel zur Veranschaulichung der reinen Ton-Verhältnisse, Berlin 1881
ENGELHARD Wolf v., Sinn und Begriff der Symmetrie, in: Studium Generale 6, 1953, 524-535
ERMENYI L., Petzvals Theorie der Tonsysteme, hg. von L. Erményi, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik 51, 1904, 281-332, 341-410
EUKLID, Die Elemente, hg. von Clemens Thaer, Darmstadt 1980[7]
EULER Leonhard, Du véritable caractère de la musique moderne, in: Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin 20, (1764) 1766, 174-199
– Vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra, Berlin 1796
– Opera postuma 1, 1862, 224-227 (ca. 1773); 250-252 (ca. 1781) [über Pythagoreische Zahlen]
– Drei Abhandlungen über die Auflösung der Gleichungen (1738, 1764, 1790), Leipzig 1928
FEDOROW E. v., Complicationsgesetze und richtige Aufstellung der Krystalle, in: Zeitschrift für Krystallographie 35, 1902, 27-34
FERMAT Pierre, Oeuvres, hg. von P. Tannéry, C. Henry und C. de Waard, 5 Bde., Paris 1891/1922 [Triangles rectangles: I 1891, 291f, 295f, 320; II 1894, 222f, 232f; III 1896, 241f; IV 1912, 82, 132, 139f, 168f, 205f; Notes critiques sur les Harmoniques de Manuel Bryenne (Musique Grecque): I 1891, 394-410]
FINKELNBURG W., Einführung in die Atomphysik, Berlin 1967[12]
FISCHER Emil, Einführung in die geometrische Kristallographie, Berlin 1956
– Christian Samuel Weiss und seine Bedeutung für die Entwicklung der Kristallographie, in: Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität, Math.-naturwissenschaftliche Reihe 11, 1962, 249ff
FISCHER Th., Zwei Vorträge über Proportionen, München 1956[2]
FOKKER Adriaan Daniel, Kristallsymmetrie und Gitterschwingungen, in: Physica 13, 1933, 1-30

(Fokker) Symmetrische Erscheinungen in Kristallen, in: Nederlandsche Tijdschrift Natuurkunde 8, 1941, 373-390
– Symmetrische fenomen in kristallen, in: Archives du Musée Teyler 9, 1939/1947, 431-448
– Equal Temperament and the 31 keyed Organ, in: Scientific Monthly 81, 1955, 161ff
– Les mathematiques et la musique, in: Archives du Musée Teyler, série 3, vol. 10, 1947, 1-31
– Neue Musik mit 31 Tönen, Düsseldorf 1966
– Les gammes et le tempérament égal, in: Acustica 1, 1951, 29-35
– On Equal Temperament, in: Physica 11, 1944/45, 447f
– Harmonische muziek, in: Archives du Musée Teyler 9, 1939/1947, 449-506
FOLKERTS Menso, „Boethius" Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters, Wiesbaden 1970
FOLLNER H. und SCHWARZ H., The Goldschmidt Complication Series, Morphological Extinction Rules and Phase Relationships, in: Kristall und Technik 15, 1980, 549-556
FRANK E., Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle 1923
FREUDENBERG Wilhelm, Die Lehre von den Intervallen, Berlin 1902
FREUDENTHAL Hans, Der orientierte Raum des Mathematikers, in: Die Naturwissenschaften 50, 1963, 199-205
– Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht 1960[2]
FRIEDMANN H., Welt der Formen, München 1930[2]
FRIEDRICHS Kurt O., From Pythagoras to Einstein, New York 1965
FRIELING Heinrich, Harmonie und Rhythmus in Natur und Kunst, München 1937
FRITZ Kurt v., Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasus von Metapont, in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, 271-307
GANTER Claus, Dur-moll-tonale Harmonik, Zürich 1978[2]
GAUSS C. F., Werke, Band 2 (1831), Göttingen 1876, 308-312
GENT Werner, Die Philosophie des Raumes und der Zeit, Bonn 1926-1930
GERICKE Helmuth, Geschichte des Zahlbegriffes, Mannheim 1970
GERTHSEN Christian, KNESER Hans Otto und VOGEL Helmut, Physik. Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen, Berlin 1982[14]
GIGON Olof, Zum antiken Begriff der Harmonie, in: Studium Generale 19, 1966, 539-547
GOBRECHT H., Bergmann-Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, 1. Bd., Mechanik, Akustik, Wärme, Berlin 1970[8]
GOHLKE Paul, Die ganzen Zahlen im Aufbau der Welt. Eine Einführung in die Theorie der ganzen Zahlen, Paderborn 1965
GOLDSCHMIDT Victor, Ueber Harmonie und Complication, Berlin 1901

(Goldschmidt) Über Entwicklung der Krystallformen, in: Zeitschrift für Krystallographie 28, 1897, 1-35, 414-451
– Über Complikation und Displikation, Heidelberg 1921
– Materialien zur Musiklehre, Heidelberg 1923-1926
– Über harmonische Analyse von Musikstücken, in: Annalen der Naturphilosophie 3, 1904, 449-508
– Beiträge zur Harmonielehre, in: Annalen der Naturphilosophie 4, 1905, 417-442; 13, 1914, 427-442
– Raum und Raumsinn. Materialien zur Naturphilosophie, Heidelberg 1925
– Atlas der Krystallformen, 9 Bände, Heidelberg 1913-1923
GONSETH Ferdinand, La géométrie et le problème de l'espace, 1949
GOSZTONYI Alexander, Der Raum. Geschichte seiner Probleme in Philosophie und Wissenschaften, 2 Bde., Freiburg i. Br. 1976
GRAF H., Bibliographie zum Problem der Proportionen, Teil 1: Von 1800 bis zur Gegenwart, Speyer 1958
GRAHN Walter, Platonische Kohlenwasserstoffe, in: Chemie in unserer Zeit 15, 1981, 52-61
GRASSL E, FISCH K. H., ANTON H., GRASSL H., Das „geistige" Band der Natur; die mathematisch-musikalische Akustik als strukturanalytisches Verfahren, in: Gegenbaurs morphologisches Jahrbuch 124, 1978, 789-841; 125, 1979, 100-155, 238-256, 265-297, 443-465; 126, 1980, 1-39, 422-446, 500-542, 657-675; 127, 1981, 52-81
GREINACHER Heinrich, Die diatonische Tonleiter als gesetzmäßiges Tonspektrum, in: Helvetica Physica Acta 6, 1933, 305-308
– Ergänzungen zur Experimentalphysik. Einführende exakte Behandlung physikalischer Aufgaben, Fragen und Probleme, Wien 1948
GROTH Paul, Entwicklungsgeschichte der mineralogischen Wissenschaften, Berlin 1926
GROTRIAN W., Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen, Berlin 1928
GÜNTHER Erich, Mathematische Betrachtungen zur diatonischen und wohltemperierten Tonleiter, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 55, 1924, 22-29
GÜNTHER Siegmund, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1908-1921
HAAG F., Bemerkungen zum Complicationsgesetze, in: Zeitschrift für Krystallographie 45, 1908, 63-75
– Die regulären Krystallkörper. Eine geometrisch-krystallographische Studie, Rottweil 1887
HAAS Arthur, Das Naturbild der neuen Physik, Berlin 1920
HAASE Rudolf, Geschichte des harmonikalen Pythagoreismus, Wien 1969
– Harmonikale Gesetze in der Natur, in: Zeitschrift für Ganzheitsforschung 14, 1970, 79-102

(Haase) Intervalle in der Natur, in: Festschrift Kurt Blaukopf, Wien 1975, 67-76
– Der meßbare Einklang. Grundzüge einer empirischen Weltharmonik, Stuttgart 1976
– Kaysers Harmonik in der Literatur der Jahre 1950 bis 1964, Düsseldorf 1967
– Die Herkunft musikalischer Grundlagen aus dem Gehör. Eine Morphologie der Intervalle, in: Musik und Zahl, hg. von Günter Schnitzler, Bonn 1976, 11-50
– Neue Forschungen über Pythagoras, in: Antaios 8, 1967, 139-160
– Das pythagoreische Lambdoma, in: Grenzgebiete der Wissenschaft 23, 1974, 361-379
– Marginalien zum 3. Keplerschen Gesetz, in: Kepler Festschrift 1971, Regensburg 1971, 159-165
HAECKEL Ernst, Kristallseelen. Studien über das anorganische Leben, Leipzig 1917
HAGENBACH Aug., J. J. Balmer und W. Ritz, in: Naturwissenschaften 9, 1921, 451-455
– Fünfundsiebzig Jahre Spektralanalyse, in: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 116, 1935, 198-218
HAKEN Hermann, Erfolgsgeheimnisse der Natur. Synergetik: Die Lehre vom Zusammenwirken, Stuttgart 1981
HANDSCHIN Jacques, Der Toncharakter, Basel 1948
– Dur – Moll, in: Die Musik in Geschichte und Gegenwart 3, 1954, 975-983
HARBURGER W., Musikalische Geometrie, in: Zeitschrift für Musikwissenschaft 11, 1929, 193-211
HARTMANN L., Johann Jakob Balmer, in: Physikalische Blätter 5, 1949, 11-14
HARTMANN P. und PERDOK W. G., On the Relations Between Structure and Morphology of Crystals, in: Acta Cryst. 8, 1955, 49-52, 521-529
HASSE H., Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin 1964²
HAUSER G., Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid, Luzern 1955
HAUSSÜHL Siegfried, Kristallgeometrie, Weinheim 1977
– Kristallstrukturbestimmung, Weinheim 1979
HAÜY R. J., Handbuch der Physik für den Elementarunterricht, aus dem Französischen übersetzt von Chr. S. Weiss, 2 Bde., Leipzig 1805 [Von den Strukturgesetzen der Krystalle, I 113-154; Von den Tönen in Vergleichung miteinander, I 457-498]
– Mémoire sur la structure de divers cristaux métalliques, in: Histoire de l'Académie royale des sciences, Paris 1785 (1788), 213-228
– Ebenmaßgesetz der Kristallbildung, Frankfurt 1819
– Traité de Cristallographie, Paris 1822
HAWKINS David, The Language of Nature, San Francisco 1964

HAWKINS John, General History of the Science and Practice of Music, 5 Bde., London 1776
HEALY-WILLIAMS N. und WILLIAMS D. F., Fourier Analysis of Test Shape of Planktonic Foraminifera, in: Nature 289, 1981, 485-487
HEATH Th. L., A Manual of Greek Mathematics, Dover 1963
HEIBERG J. L., Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum, München 1925
HEIMENDAHL Eckart, Gegensatz und Komplementarität, in: Transparente Welt. Festschrift zum 60. Geburtstag von Jean Gebser, Bern 1965
HEIS Eduard und ESCHWEILER Thomas Joseph, Lehrbuch der Geometrie, Köln 1858
HEISENBERG Werner, Gedanken der antiken Naturphilosophie in der modernen Physik, in: Die Antike. Zeitschrift für Kunst und Kultur des klassischen Altertums 13, 1937, 118-124
– Der Teil und das Ganze, München 1969
– Das Naturbild der heutigen Physik, Hamburg 1955
HEITLER Walter, Der Mensch und die naturwissenschaftliche Erkenntnis, Braunschweig 1970
– Harmonik – ein komplementärer Aspekt zur analytischen Wissenschaft, in: Festschrift Rudolf Haase, Eisenstadt (1980)
– Über die Komplementarität lebloser und lebender Materie, in: Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse 1976, Nr. 1, 3-21
– Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften, Mainz 1972
– The Quantum Theory of Radiation, Oxford 1957
HELLER Siegfried, Die Entdeckung der steiten Teilung durch die Pythagoreer, in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, 319-354
HELMHOLTZ Hermann v., Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik, Braunschweig 1896[5]
– Über Combinationstöne, in: Wissenschaftliche Abhandlungen 1. Band, Leipzig 1882, 256-302
– Über die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie, in: Populäre wissenschaftliche Vorträge, 1. Band, Braunschweig 1865
– Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie, in: Wissenschaftliche Abhandlungen, 2. Band, Leipzig 1883, 610-617
– Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, ebenda, II 618-639
HERMANN Armin, Lexikon Geschichte der Physik A-Z, Köln 1972
– Die Jahrhundertwissenschaft: Werner Heisenberg und die Physik seiner Zeit, Stuttgart 1977
– Frühgeschichte der Quantentheorie, Mosbach in Baden 1969
– Max Planck in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten, Reinbek 1973

HERMANN O., Über die Ableitung der Formeln bei der harmonischen Teilung, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 34, 1903, 340-343
HERSCHEL A. S., On a Relation between the Spectrum of Hydrogen and Acoustics, in: Astrophysical Journal 7, 1898, 150-155
HESSENBRUCH Helmut, Geheimnisse und Wesen der Zahlen, Köln 1963
Hierarchical Structures, hg. von L. L. Whyte, Ag. Wilson und D. W. Wilson, in: Proceedings of the Symposium 18./19. November 1968 at Ithaca, New York 1969
HILBERT David, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1913, 1972[11]
– Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Berlin 1896
HINDEMITH Paul, Unterweisung im Tonsatz, Mainz 1940[2]
HLAWKA Edmund, Zum Zahlbegriff, in: Philosophia Naturalis 19, 1982, 413-470
HÖFLING Oskar, Physik, Band II, Teil 3: Quanten und Atome, Bonn 1979[12]
HOFFMANN J., Der pythagoreische Lehrsatz, mit 32 teils bekannten, teils neuen Beweisen versehen, Mainz 1819, 1821[2]
HOFMANN J. E., Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Berlin 1963[2]
HOFMANN Wolfgang, Goldener Schnitt und Komposition. Versuch zur Fixierung eines Ordnungsprinzips, Wilhelmshaven 1973
HOPPE E., Geschichte der Physik, Braunschweig 1926
HORNBOSTEL E. M. v., Musikalische Tonsysteme, in: Handbuch der Physik, Band 8: Akustik, hg. von H. Geiger und Karl Scheel, Berlin 1927, 425-449
HORNE R. W., The Structure of Viruses, in: Scientific American 208, 1963, 48-56
HOROVITZ Thekla, Vom Logos zur Analogie. Die Geschichte eines mathematischen Terminus, Zürich 1978
HOYER Ulrich, Die Geschichte der Bohrschen Atomtheorie, Weinheim 1974
– Bohrs Weg zur Atomtheorie, in: Physikalische Blätter 38, 1982, 345-348
HÜSCHEN Heinrich, Der Harmoniebegriff im Mittelalter, in: Studium Generale 19, 1966, 548-554
HUND F., Linienspektrum und periodisches System der Elemente, Berlin 1927
– Geschichte der Quantentheorie, Zürich 1975[2]
HUNT F. V. Origins in Acoustics. The Science of Sound from Antiquity to the Age of Newton, London 1978
HUSMANN Heinrich, Einführung in die Musikwissenschaft, Wilhelmshaven 1975
HUYGENS Christiaan, Oeuvres, Band 20: Musique et mathematique musique 1666 à 1695, La Haye 1940
INDLEHOFER K. H., Zahlentheorie, Stuttgart 1978
JAHODA Gerhard, Identische Strukturen pythagoreischer Zahlenschemata, Wien 1971

JAMMER Max, Das Problem des Raumes. Die Entwicklung der Raumtheorien, Darmstadt 1980[2]
— The Conceptual Development of Quantum Mechanics, New York 1966
JEANS James, Musik und ihre physikalischen Grundlagen, Stuttgart 1938
— Der Werdegang der exakten Wissenschaft, Bern 1948
— Atomicity and Quanta, Cambridge 1926
JOCHMANN E., Grundriß der Experimentalphysik, Berlin 1881[7]
JONG W. F. de und STRADNER E., Zeittafel: Skizze der Entwicklung der geometrischen Kristallographie und der Strukturtheorie, in: Tschermaks Mineralogische und Petrographische Mitteilungen 5, 1956, 362-379
JONQUIERE Alfred, Grundriß der musikalischen Akustik, Leipzig 1898
JORDAN P., Verdrängung und Komplementarität, 1951[2]
— Die weltanschauliche Bedeutung der modernen Physik, München 1971
— Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936
JUNECKE Hans, Die wohlbemessene Ordnung. Pythagoreische Proportionen in der historischen Architektur, Berlin 1982
JUNGHANN Gustav, Ein einfaches Gesetz für die Entwicklung und die Gruppierung der Kristallzonen, in: Annalen der Physik 152, 1874, 68-95
JUSKEVIC A. P., Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Basel 1964
KALÄHNE A., Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik, Leipzig 1910
KANITSCHNEIDER Bernulf, Geometrie und Wirklichkeit, Berlin 1971
— Philosophie und Moderne Physik. Systeme, Strukturen, Synthesen, Darmstadt 1979
KAYSER Hans, Orpheus. Morphologische Fragmente einer allgemeinen Harmonik, Berlin 1926
— Lehrbuch der Harmonik, Zürich 1950
— Der hörende Mensch, Berlin 1932
— Harmonia Plantarum, Basel 1943
— Akroasis. Die Lehre von der Harmonik der Welt, Stuttgart 1976[3]
— Das akustische Atommodell, in: Abhandlungen zur Ektypik harmonikaler Wertformen, Zürich 1938, 165ff
KAYSER Heinrich, Spektralanalyse, in: Handbuch der Physik, Band 6: Optik, Leipzig 1906[2]
KEIDEL Wolf D., Der Harmoniebegriff des Pythagoras aus sinnesphysiologischer Sicht, in: Musik und Zahl, hg. von Günter Schnitzler, Bonn 1976, 201-231
KEPLER Johannes, Weltharmonik, übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, München 1973
KILLIAN J., Der Kristall. Das Geheimnis des Anorganischen, Berlin 1943
KIRNBERGER Johann Philipp, Die wahren Grundsätze zum Gebrauch der Harmonie, Berlin 1773

KLEBER W., Einführung in die Kristallographie, Berlin 1965[8]
– Angewandte Gitterphysik, Berlin 1960
KLEINHAMMES Otto, Die Quadratur des Kreises aus dem Geiste der Musik, Wangen/Allgäu 1949
KNEIF Tibor, Die Idee der Natur in der Musikgeschichte, in: Archiv für Musikwissenschaft 28, 1971, 302-314
KNESER Adolf, Mathematik und Natur, Breslau 1911
KÖSTER Alfons, Albert Freiherr von Thimus, in: Rheinische Musiker 58, 1964, 96-101
– Die unmittelbaren Auswirkungen der „Harmonikalen Symbolik" des Freiherrn Albert von Thimus, in: Antaios 8, 1966/67, 450-457
KÖSTLER Arthur, Die Nachtwandler. Die Entstehungsgeschichte unserer Welterkenntnis, Bern 1959
KOLK Dieter, Eine harmonikale Analyse des Pythagoreischen Dreiecks, in: Musik und Zahl, hg. von Günter Schnitzler, Bonn 1976, 51-65
KOLLER H., Harmonie und Tetraktys, in: Museum Helveticum 16, 1959, 238-248
KOMMERELL K., Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik, Leipzig 1922
KONEN H., Das Leuchten der Gase und Dämpfe, Braunschweig 1913
KORNERUP Thorvald, Das Goldene Tonsystem als Fundament der theoretischen Akustik, Kopenhagen 1935
KRAFFT Fritz, Geschichte der Naturwissenschaft, I: Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen, Freiburg 1971
KRAMER P. Symmetriestrukturen der Physik, in: Naturwissenschaften 69, 1982, 114-122
KRBEK Franz, Eingefangenes Unendlich. Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1962[3]
KRENEK E., Musik und Mathematik, in: E. Krenek, Über neue Musik, Darmstadt 1979, 71-89
KRENEK E., Proportionen und pythagoreische Hämmer, in: Musica 14, 1960, Heft 11
KRONECKER L., Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1901
KROPP Gerhard, Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten, Heidelberg 1969
KRUEGER Felix, Beobachtungen an Zweiklängen, in: Philosophische Studien 16, 1900, 307-379, 568-623
KÜKELHAUS Hugo, Urzahl und Gebärde. Grundzüge eines kommenden Maßbewußtseins, Darmstadt 1980[3]
KUSCH L., Mathematik für Schule und Beruf, Band 2: Geometrie, Essen 1978[10]
KUYK Willem, Complementarity in Mathematics. A First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History, Dordrecht, Holland 1977

Kytzler, Bernhard, Die Weltseele und der musikalische Raum (Platons Timaios 35a), in: Hermes 87, 1959, 393-413
LA HIRE, Sectiones conicae, Paris 1685
LAUE M. von, MISES R. von, Stereoskopbilder von Kristallgittern, 2 Bde., Berlin 1926/1936
LAUE M. von, Geschichte der Physik, Bonn 1947; 1950[3]
LAWLER Robert, Sacred Geometry, London 1982
LENZ Harald Otmar, Mineralogie der alten Griechen und Römer, 1966
LIEBISCH Th., Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881
– Zur analytisch-geometrischen Behandlung der Krystallographie, in: Zeitschrift für Krystallographie 3, 1879, 25-41
LIETZMANN W., Der pythagoreische Lehrsatz, mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem, Leipzig 1912; 1968[9]
– Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 v. Chr., in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 49, 1918, 148-149
– Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie, München 1952
– Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie, Leipzig 1927[4]
LINCOLN Harry B., The Computer and Music, Ithaca 1970
LINDEMANN F., Zur Geschichte der Polyeder und Zahlzeichen, 1897
LOCHER-ERNST Louis, Urphänomene der Geometrie, Leipzig 1937
– Projektive Geometrie, Zürich 1940
LOHMANN Johannes, Die griechische Musik als mathematische Form, in: Archiv für Musikwissenschaft 14, 1957, 147-155
– Musiké und Logos. Aufsätze zur griechischen Philosophie und Musiktheorie zum 75. Geburtstag des Verfassers am 9. Juli 1970, hg. von Anastasios Giannarás, Stuttgart 1970
LOOMIS Elisha Scott, The Pythagorean Proposition, Ann Arbor, Michigan 1940
LORENZ Dieter, Die Raum-Zeit Problematik in der Quantengeometrodynamik, in: Philosophia Naturalis 20, 1983, 58-71
LORENZEN Paul, Die Entstehung der exakten Wissenschaften, Berlin 1960
LÜCK Reinhard, Pythagoreische Zahlen für den dreidimensionalen Raum, in: Physikalische Blätter 35, 1979, 72-75
– Die elektronische Struktur von Aluminium, in: Aluminium 45, 1969, 733-739
LÜRKER Manfred, Der Kreis als Symbol, im Denken, Glauben und künstlerischen Gestalten der Menschheit, Tübingen 1981
MACLEAN J., On harmonic Ratios in Spectra, in: Annals of Science 28, 1972, 121-137
MAINZER Klaus, Geschichte der Geometrie, Mannheim 1980

MALENGREAU Julien, Etude critique du théorème de Pythagore, Lausanne 1945
MALER W., Beitrag zur durmolltonalen Harmonie, München 1957
MARCH Arthur, Natur und Erkenntnis. Die Welt in der Konstruktion des heutigen Physikers, Wien 1948
– Die physikalische Erkenntnis und ihre Grenzen, Braunschweig 1960
– und FORADORI Ernst, Ganzzahligkeit in Raum und Zeit, in: Zeitschrift für Physik 114, 1939, 215-226, 653-666
MARTIN Artemus, On Rational Right-Angled Triangles, 1912
MARX C. M., Geschichte der Krystallkunde, Karlsruhe 1825
MASON Stephen F., Geschichte der Naturwissenschaft in der Entwicklung ihrer Denkweisen, Stuttgart 1961
MATTERN C. F. T., Virus Architecture as Determed by X-Ray Diffraction and Electron Microscopy, in: Biochem. Viruses 1969, 55-100
MEHRA J., RECHENBERG H., The Historical Development of Quantum Theory, Vol. I, New York 1982
MENNINGER Karl, Zwischen Raum und Zahl, Frankfurt/Main 1960
MERSENNE Marin, Harmonie universelle, conténant la théorie et la pratique de la musique, Paris 1636
MESCHKOWSKI Herbert, Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik, Mannheim 1974²
MEYER Amand, Der Pythagoreische Lehrsatz, bewiesen durch reguläre Dreiecke, Metten 1877/78
MEYER Bonaventura, APMONIA. Bedeutungsgeschichte des Wortes von Homer bis Aristoteles, Zürich 1932
MEYER-ABICH K. M., Korrespondenz, Individualität und Komplementarität, Wiesbaden 1965
MICHEL Paul-Henri, De Pythagore à Euclide. Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes, Paris 1950
MIELEITNER K., Geschichte der Mineralogie in Altertum und Mittelalter, in: Fortschritte der Mineralogie 7, 1922, 427
MIES Paul, Rezension zu: V. Goldschmidt, Materialien zur Musiklehre, in: Zeitschrift für Musikwissenschaft 8, 1925/26, 588-590
MIESCHER K. Einheit in der Gegensätzlichkeit als eine Grundlage unseres Wesens und unserer Erkenntnis, in: Dialectica 2, 1948, 11-24; 4, 1950, 305ff; 6, 1952, 270-283; 9, 1955, 305-339
MILCH L., Zum 75. Geburtstage von Victor Goldschmidt, in: Festschrift zum 75. Geburtstage von seinen Schülern und Freunden gewidmet, Heidelberg 1928
MILLER W. H., Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1856
– On the Anharmonic Ratio of Radii Normal to Four Faces of a Crystal in one Zone; and on the Change of the Axes of a Crystal, in: Philosophical

(Miller) Magazine Febr. 1857, 96-113
MINKOWSKI Hermann, Gesammelte Abhandlungen, 2 Bde., Leipzig 1911
MÜLLER Ernst, Zur erkenntnistheoretischen Grundlegung des Pythagoreischen Lehrsatzes, in: Annalen der Naturphilosophie 12, 1913, 170-186, 234-235; 10, 1911
MÜNXELHAUS Barbara, Pythagoras musicus, Bonn 1976
NAAS J. und SCHMID H. L., Mathematisches Wörterbuch, Berlin und Stuttgart 1965[3]
NABER H. A., Das Theorem des Pythagoras, Haarlem 1908
NAREDI-RAINER Paul v., Architektur und Harmonie. Zahl, Maß und Proportion in der abendländischen Baukunst, Köln 1982
NAUMANN Carl Friedrich und ZIRKEL Ferdinand, Elemente der Mineralogie, Leipzig 1885[12]
NAUMANN Emil, Erklärung der Musiktafel in Raffaels „Schule von Athen", in: Zeitschrift für bildende Kunst 14, 1879, 1-14
NEUGEBAUER Otto, Zur Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes, in: Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse 1928, 45-48
– Vorgriechische Mathematik, Berlin 1969[2]
NICKEL E. Grundwissen in Mineralogie, Thun–München 1973
NIGGLI P., Von der Symmetrie und von den Baugesetzen der Kristalle, Leipzig 1941
– Krystallographische und strukturtheoretische Grundbegriffe, in: Handbuch der Experimentalphysik, Leipzig 1928
NOWACKI Werner, Homogene Raumteilung und Kristallstruktur, Zürich 1935
– Fouriersynthese von Kristallen, Basel 1952
OETTINGEN A. v., Harmoniesystem in dualer Entwicklung, Dorpat–Leipzig 1866
– Das duale Harmoniesystem, Leipzig 1913
– Die Grundlage der Musikwissenschaft und das duale Reininstrument, Leipzig 1916
OHM G. S., Über die Definition des Tones etc., in: Annalen der Physik und Chemie 59, 1843, 497-565
– Grundlinien einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie, Erlangen 1817
OLIVER George, The Pythagorean Triangle, Nachdruck Minneapolis 1975
OSTWALD Wilhelm, Die Harmonie der Formen, Leipzig 1922
PÄSLER Max, Pythagoreische Zahlen, in: Physikalische Blätter 33, 1977, 453-456
– Einiges aus der Geschichte der Kristallkunde. Zur 50. Wiederkehr des Todestages von W. Voigt, in: Physikalische Blätter 25, 1969, 542-546
– Prinzipe der Mechanik, Berlin 1968
PARTINGTON J. R., Erinnerungen an Max Planck, in: Physikalische Blätter

(Partington) 4, 1948, 172
PASCHEN F. und GÖTZE R., Seriengesetze der Linienspektren, Berlin 1922
PEACOCK M. A., Calaverite and the Law of Complication, in: The American Mineralogist 17, 1932, 317-337
PETERSSON Hans, Über die Darstellung natürlicher Zahlen, Hamburg 1926
PFAFF H., Über harmonische Kegelschnitte, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 49, 1918, 113-127
PFEIFER F. X., Der Goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst, Augsburg 1885
PLANCK Max, Ein neues Harmonium in natürlicher Stimmung nach dem System von C. Eitz, in: Annalen der Physik und Chemie 48, 1893, Anhang 8-9
– Die natürliche Stimmung in der Vokalmusik, in: Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 9, 1893, 418-440
– Das Weltbild der neuen Physik, Leipzig 1947[10]
– Die physikalische Struktur des Phasenraumes, in: Annalen der Physik 50, 1916, 385-418
– Bemerkungen über die Emission von Spektrallinien, in: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1915, 909-913
– Wissenschaftliche Selbstbiographie, Leipzig 1948
– Einführung in die theoretische Physik, Band 2, Leipzig 1922[2], 89-94
– Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums, in: Naturwissenschaften 31, 1943, 153-159
– Physikalische Abhandlungen und Vorträge, Band 3, Braunschweig 1958
– Scheinprobleme der Wissenschaft, Leipzig 1947
PLATON, Timaios oder Die Schrift über die Natur, übersetzt von R. Kapferer und A. Fingerle, München 1952
PONGS Hermann, Die Zukunft der komplementären Betrachtungsweise, Marburg 1978
POPP Walter, Wege des exakten Denkens, München 1981
PRICE Derek J. de Solla, The Babylonian „Pythagorean Triangle“ Tablet, in: Centaurus 10, 1964, 1-13
PRIGOGINE I. und STENGERS I., Dialog mit der Natur. Neue Wege naturwissenschaftlichen Denkens, München 1980
QUENSTEDT Friedrich August, Grundriß der rechnenden Krystallographie, Tübingen 1873
RAAZ Franz und TERTSCH Hermann, Geometrische Kristallographie und Kristalloptik, Wien 1939
RAAZ Franz, Röntgenkristallographie, Berlin 1975
RAMDOHR Paul und STRUNZ Hugo, Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie, Stuttgart 1978[16]
RAMDOHR Paul, Zum 100. Geburtstage von Victor Goldschmidt, in: Ruperto Carola 5, 1953, Nr. 9/10, 160f

RAMEAU J.-Ph., Démonstration du principe de l'harmonie, Paris 1750
– Traité de l'harmonie reduite à ses principes naturels, Nachdruck Rom 1967
RATZEBURG J. T. C., Untersuchungen über Formen und Zahlenverhältnisse der Naturkörper, Berlin 1829
REIDEMEISTER Kurt, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig 1940
– Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949
– Zur Logik der Lehre vom Raum, in: Dialectica 6, 1952, 327-342
– Raum und Zahl, Berlin 1957
– Vorlesungen über Grundlagen der Geometer, Berlin 1930
REINECKE Hans-Peter, Naturwissenschaftliche Grundlagen der Musik, in: Einführung in die systematische Musikwissenschaft, hg. von Carl Dahlhaus, Köln 1971
REISER Th., Das Geheimnis der pythagoreischen Tetraktys, Heidelberg 1967
RIBENBOIM Paulo, Fermat's Last Theorem: Recent Developments, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Mannheim 1980, 75-92
RIELÄNDER Michael M., Reallexikon der Akustik, Frankfurt/Main 1982
RIEMANN Hugo, Geschichte der Musiktheorie, Berlin 1920²
– Über das musikalische Hören, Leipzig 1874
RINNE F., Einführung in die kristallographische Formenlehre, Leipzig 1922
RITZ Walter, Zur Theorie der Serienspektren, Diss. Leipzig 1903
– Über ein neues Gesetz der Serienspektren, in: Physikalische Zeitschrift 9, 1908, 521-529
ROEDERER J. G., Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik, Berlin 1977
ROENTGEN E., Einiges über Theorie und Praxis in musikalischen Dingen, in: Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 1893, 365-380
ROGOSINSKI Werner, Fouriersche Reihen, Berlin 1930
ROHWER Jens, Die harmonischen Grundlagen der Musik, Basel 1970
– Artikel *Intervall* in: Die Musik in Geschichte und Gegenwart 6, 1957, 1326-1365
ROMAN T., Reguläre und halbreguläre Polyeder, Berlin 1968
ROSE Gustav, Elemente der Kristallographie, Berlin 1838 und 1873
RULAND Heiner, Ein Weg zur Erweiterung des Tonerlebens. Musikalische Tonkunde am Monochord, Basel 1981
RYDBERG Johannes Robert, Untersuchungen über die Beschaffenheit der Emissionsspektren, Leipzig 1922
SACHS Eva, Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917
SADEBECK A., Gustav Roses Elemente der Krystallographie, Berlin 1873³
SAMBURSKY S., Das physikalische Weltbild der Antike, Zürich 1965
SARTON George, A History of Science, 2 Bde., Cambridge 1959
SCHALLREUTER Walter, Einführung in die Physik, Band 3: Optik und Atomphysik, Halle (Saale) 1956

SCHARLAU Winfried und OPOLKA Hans, Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung, Berlin 1980
SCHAVERNOCH Hans, Die Harmonie der Sphären. Die Geschichte der Idee des Welteneinklangs und der Seeleneinstimmung, Freiburg 1981
SCHLEGEL V., Mathematische Bestimmung der in den diatonischen Dur-Tonleitern vorkommenden Zahlenverhältnisse und der zwischen den einzelnen Tönen bestehenden Consonanz, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik 8, 1873, 203-217
SCHMIEDEL Peter, Zur Frage der Dur-Moll-Polarität, in: Archiv für Musikwissenschaft 13, 1956, 143-167
SCHMIDT Max C. P., Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik, Wiesbaden 1966
SCHNEIDER Marius, Pythagoras in der Schmiede, in: Festschrift zum 60. Geburtstag von Willi Kahl am 18. Juli 1953, Köln 1953, 126-129
SCHNITZLER Günter (Hg.), Musik und Zahl. Beiträge zum Grenzbereich zwischen Musik und Mathematik, Bad Godesberg 1976
SCHÖNBERG M., Quantum Theory and Geometry, in: Max-Planck-Festschrift 1958, Berlin 1959, 321-338
SCHOPENHAUER Arthur, Über die vierfache Wurzel vom zureichenden Grunde, Leipzig 1891
– Die Welt als Wille und Vorstellung = Werke, Band 1, Darmstadt 1974
SCHOPPER H., Symmetrieprinzipien und Naturgesetze, in: Naturwissenschaften 50, 1963, 205-211
SCHOUTE P. H., Mehrdimensionale Geometrie, Leipzig 1905
SCHROEDER Robert, Krystallometrisches Praktikum, Berlin 1950
SCHRÖDINGER Erwin, Die Wellenmechanik, Stuttgart 1963
– 2400 Jahre Quantentheorie, in: Annalen der Physik 3, 1948, 43-48
– Die Natur und die Griechen, Hamburg 1956
– Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen, in: Die Naturwissenschaften 22, 1934, 518-520
– Was ist ein Naturgesetz? Beiträge zum naturwissenschaftlichen Weltbild, München 1979
SCHWABE Julius, Hans Kaysers letzte Entdeckung: die Pythagoreische Tetraktys auf Raffaels „Schule von Athen“, in: Symbolon 5, 1966, 92-102
SEIDENBERG A., The Origin of Mathematics, in: Archive for History of Exact Sciences 18, 1977, 301-342
SEIWERT Rolf, Die Elektronenhülle des Atoms, in: Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band IV, Teil 1: Aufbau der Materie, Berlin 1975, 15-198
SERRE J. A., Essais sur les principes de l'harmonie, Paris 1753
SEXL R. U., Was die Welt zusammenhält. Physik auf der Suche nach dem Bauplan der Natur, Stuttgart 1982

SHIRLAW Matthew, The Theory of Harmony, Coar 1955
SIERPINSKI Wacław, Pythagorean Triangles, New York 1962
– Cardinal and Ordinal Numbers, Warschau 1958
SIMBRIGER Heinrich, Komplementäre Harmonik, Regensburg 1980[2]
SIMON Max, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert, Leipzig 1906
– Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909
SMITH Cyril Stanley, Structural Hierarchy in Inorganic Systems, in: Hierarchical Structures hg. von L. L. Whyte, A. G. Wilson und D. Wilson, in: Proceedings of the Symposium 18./19. November at Douglas, New York 1969
SMITH David Eugene, History of Mathematics, 2 Bde., Boston 1923/1925
SOMMERFELD A., Atombau und Spektrallinien, 2 Bde., Braunschweig 1960[8]
SORET J. L., On Harmonic Ratios in Spectra, in: Philosophical Magazine 42, 1871, 464-465
SPRINGER Anton, Raffael's „Die Schule von Athen", Wien 1883
– Raffael und Michelangelo, Leipzig 1883[2]
SSAMOILOW A., Die Stellung der musikalischen Intervalle auf der Linie, auf der Fläche und im Raum, in: Bulletin der Societé Union Musicologique 4, 1924, 168
STAPLETON H. E., Ancient and Modern Aspects of Pythagorism, in: Osiris 8, 1958, 12-53
STAUDER Wilhelm, Einführung in die Akustik, Wilhelmshaven 1980
STEELE D., Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik, in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, 146ff
STEINER Jakob, Die geometrischen Constructionen, 1833, Leipzig 1895
STEINER Joachim, Grundzüge einer neuen Musiktheorie, Wien 1891
STEINITZ Ernst, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934
STÖSSEL R., Kleine Einführung in die pythagoreische Harmonik, Rorschach 1974
STONEY J., On the Cause of the Interrupted Spectra of Gases, in: Philosophical Magazine 41, 1871, 291-296
STRAKOSCH Alexander, Einführung in die Geometrie durch übende Anschauung, Stuttgart 1962
STRAUSS UND TORNEY Lothar von, Das Komplementaritätsprinzip der Physik in philosophischer Analyse, in: Zeitschrift für philosophische Forschung 10, 1956, 109f
STRUBECKER Karl, Geometrie in alter und neuer Zeit, in: Bild der Wissenschaft 1967, 1027-1034; 1968, 51-57
– Vorlesungen über darstellende Geometrie, Göttingen 1967[2]
– Eine Einführung in die höhere Mathematik. Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen auf Geometrie, Physik, Naturwissenschaft und Technik,

(Strubecker) 3 Bde., München 1966-1980
STRUIK D. J., Abriß der Geschichte der Mathematik, mit einem Anhang über die Mathematik des 20. Jahrhunderts von I. Pogrebysski, Berlin 1976[6]
STRUNZ Hugo, Mineralogische Tabellen, Leipzig 1970
STUDER André M., Architektur Mensch Maß. Schriften über Harmonik Nr. 2, Bern 1976
SUTER Heinrich, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Zürich 1872/75
SWETZ Frank J. und KAO T. I., Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China, Reston 1977
SZABO Arpad, Anfänge der griechischen Mathematik, Wien 1969
– Der Ursprung des Euklidischen Verfahrens und die Harmonielehre der Pythagoreer, in: Mathematische Annalen 150, 1963, 203-217
– Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie (Epinomis 990D 1-6), in: Hermes 98, 1970, 405-421
TANAKA Shohé, Studien im Gebiete der reinen Stimmung, in: Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft 6, 1890, 1-90
TANNERY Paul, La géometrie grecque, Paris 1887
TARTINI Giuseppe, Traktat über die Musik gemäß der wahren Wissenschaft von der Harmonie, übersetzt und erläutert von Alfred Rubeli, Düsseldorf 1966
TERTSCH H, Trachten der Kristalle, Berlin 1926
– Der Schlüssel zum Aufbau der Materie, Wien 1947[2]
THIMUS Albert von, Die harmonikale Symbolik des Alterthums, 2 Bde., Köln 1868-1876
THOMPSON D'Arcy Wentworth, Über Wachstum und Form, Basel 1973
THÜRLINGS A., Die beiden Tongeschlechter und die neuere musikalische Theorie, Diss. München 1877
TIEBE A., Vollständige Tafeln Pythagoreischer Dreiecke für die Katheten und Hypotenusen von 1 bis 100, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 18, 1887, 178-181
TIESSEN H., Musik der Natur, Freiburg i. Br. 1953
TRENDELENBURG F., Ohms akustisches Grundgesetz und die neueren Anschauungen über die Klanganalyse durch das Ohr, in: Elektrotechnische Zeitschrift 60, 1939, 449-452
– Einführung in die Akustik, Berlin 1950
TROPFKE Johannes, Geschichte der Elementarmathematik, 7 Bde., Berlin 1930/1940[3]
– Geschichte der Elementarmathematik, 4. Aufl., Band 1: Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmuth Gericke, Berlin 1980
UEXKÜLL Jakob von, Kompositionslehre der Natur, in: Ausgewählte Schrif-

(Uexküll) ten 1899-1935, Frankfurt/Main 1980
ULLMANN Ernst, Die Lehre von den Proportionen, Dresden 1961²
UNGER Georg, Physik am Scheideweg. Die Grundlagen der exakten Wissenschaften in neuer Betrachtungsweise, Basel 1949
UNSÖLD A., Evolution kosmischer, biologischer und geistiger Strukturen, Stuttgart 1981
VAJNSTEJN B. K., Modern Crystallographie. Symmetry of Crystals. Methods of Structural Crystallography, Berlin 1981
VALENS Evans G., The Number of Things. Pythagoras, Geometry and Huming Strings, London 1964
VAN DEN BROECK André, Philosophical Geometry, New York 1972
VERNO C. R., Fibonacci Numbers and Pythagorean Triples, in: Mathematics Teacher 66, 1973, 652
VIOLA C. M., Grundzüge der Kristallographie, Leipzig 1904
– Ueber geometrische Ableitung der Krystallographie, in: Zeitschrift für Krystallographie 26, 1896, 113-129
VOGEL Hermann W., Praktische Spektralanalyse, Nördlingen 1877
VOGEL Kurt, Vorgriechische Mathematik, Teil II, Hannover und Paderborn 1959
– Pythagoreische Zahlen bei den Babyloniern, in: Archimedes 3, 1951, 41
VOGEL Martin, Die Lehre von den Tonbeziehungen, Bonn 1975
– Die Zukunft der Musik, Düsseldorf 1968
– Musiktheater I: Die Krise des Theaters und ihre Überwindung, Bonn 1980
– Reine Stimmung und Temperatur, in: Musik und Zahl, hg. von Günter Schnitzler, Bonn 1976, 265-292
– Harmonikale Deutung eines pythagoreischen Spruches, in: Festschrift J. Schmidt-Görg, Bonn 1957, 377-382
– Harmonia und Mousikē im griechischen Altertum, in: Studium Generale 19, 1966, 533-538
– Die Zahl Sieben in der spekulativen Musiktheorie, phil. Diss. Bonn 1955
– An den Grenzen des Tonsystems, in: Musica 17, 1963, 155-158
– Arthur von Oettingen und der harmonische Dualismus, in: Beiträge zur Musiktheorie des 19. Jahrhunderts, Regensburg 1966
– Onos Lyras. Der Esel mit der Leier, Düsseldorf 1973
VOGT H., Die Geometrie des Pythagoras, in: Bibliotheca mathematica (3) 9, 1909, 15-54
WAERDEN B. L. van der, Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, Basel 1966
– A History of Algebra, Vol. 1: From the Stone Age to Brahmagupta, Berlin 1983
– Die Arithmetik der Pythagoreer, in: Mathematische Annalen 120, 1947/49, 127-153, 676-700

(Waerden) Die Harmonielehre der Pythagoreer, in: Hermes 78, 1943, 163-199
– Große Terz, Oktave und Harmonie, in: Museum Helveticum 17, 1960, 111-114
– Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie, in: Archive for History of Exact Sciences 18, 1977, 343-357
– Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Zürich–München 1979
– Die vier Wissenschaften der Pythagoreer, Opladen 1977
– On Pre-Babylonian Mathematics, in: Archive for History of Exact Sciences 23, 1980, 1; I 1-25; II 27-46
– Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1973[2]
– Sources of Quantum Mechanics, Amsterdam 1967
– Ein Satz über räumliche Fünfecke, in: Elemente der Mathematik 25, 1970, 73-78
– Hamiltons Entdeckung der Quaternionen, Göttingen 1973
WAERDEN B. L. van der, GRASS H., Studien zur Theorie der quadratischen Formen, Berlin 1968
WAGNER Rüdiger, Albert von Thimus: Die harmonikale Symbolik des Altertums. Ein seit 100 Jahren vergessenes Werk, in: Zeitschrift für Ethnologie 96, 1971, 90-97
WALLIS John, Opera Mathematica, 3 Bde., Oxford 1693-1699
WANTZLOEBEN Sigfrid, Das Monochord als Instrument und als System, Halle 1911
WEBER L., René Just Haüy. Zur hundertsten Wiederkehr seines Sterbetages, in: Zeitschrift für Kristallographie 27, 1922, 129-144
WEBER Werner, Die Pellsche Gleichung, Leipzig 1939
WEIDNER Ernst, Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 v. Chr., in: Orientalistische Literaturzeitung 19, 1916, Nr. 9, 257-263
WEISS Chr. S., Betrachtung der Dimensionsverhältnisse in den Hauptkörpern des sphäroedrischen Systems und ihren Gegenkörpern, in Vergleich mit den harmonischen Verhältnissen der Töne, in: Abhandlungen der Kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin 1818, 1819, physikalisch-mathematische Classe, Berlin 1820, 227-241
WEISSKOPF V. F., Das Wunder des Wissens. Von der Universalität der Naturwissenschaften, München 1964
WEITZENBOECK Roland W., Der vierdimensionale Raum, Basel 1956
WEIZSÄCKER C. F. von, Komplementarität und Logik, in: Naturwissenschaften 42, 1955, 521-529, 545-555
– Die Einheit der Natur, München 1971
– Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte, Hamburg 1971
WELSER B., Die Harmonie der Schöpfung, Ulm 1949[4]

WESSLING H., Der Stein der Weisen – Die Gesetze der Musik, Dortmund 1950
WEYL H., Die Einzigartigkeit der pythagoreischen Maßbestimmung, in: Mathematische Zeitschrift 12, 1922, 114-116
– Symmetrie, Basel 1955
– Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, Oldenburg 1966[3]
– Mathematische Analyse des Raumproblems (1923), Darmstadt 1977
WHYTE L. L. et al., Hierarchical Structures, Proceedings, New York 1969
WIEDERKEHR K. H., René-Just Haüys Strukturtheorie der Kristalle, in: Centaurus 21, 1977, 278-299
WIELEITNER H., Der räumliche pythagoreische Lehrsatz, in: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 49, 1918, 321-322
– Die Geburt der modernen Mathematik, Karlsruhe 1924
– Zur Frühgeschichte der Räume von mehr als drei Dimensionen, in: Isis 7, 1925, 486-489
WILLE Rudolf, Mathematik und Musiktheorie, in: Musik und Zahl, hg. von Günter Schnitzler, Bonn 1976, 233-264
– Mathematische Sprache in der Musiktheorie, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Mannheim 1980, 167-184
WINKLER H. G. F., Struktur und Eigenschaften der Kristalle, Berlin 1950
– Hundert Jahre Bravais Gitter, in: Die Naturwissenschaften 37, 1950, 385-390
WIPPER J. Sechsundvierzig Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, Leipzig 1880; 1911[2]
WISLICENY Jürgen, Grundbegriffe der Mathematik. Rationale, reele und komplexe Zahlen, Berlin 1975
WOLF L, Symmetrie, Harmonie und Bauplan in Mathematik und Naturwissenschaft, in: Beiträge zur christlichen Philosophie, Mainz 1948
WOLF Karl Lothar, Symmetrie. Versuch einer Anweisung zu gestalthaftem Sehen und sinnvollem Gestalten, Münster 1956
WOLPERT F. A., Neue Harmonik. Die Lehre von den Akkordtypen und Grundakkorden, Wilhelmshaven 1972
WÜRSCHMIDT J., Tonleitern, Tonarten und Tonsysteme. Eine historisch-theoretische Untersuchung, in: Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 63, 1931, 133-238
– Zur logarithmischen und graphischen Darstellung der musikalischen Intervalle, in: Zeitschrift für Musik 5, 1921, 198-200
WUSSING H., Mathematik in der Antike, Leipzig 1965[2]
– Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Berlin 1979
ZACHARIAS M., Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1930
ZEDERBAUER E., Die Harmonie im Weltall, in der Natur und Kunst, Wien 1917

ZEISING Adolf, Der Goldene Schnitt, Leipzig 1884
– Die regulären Polyeder, in: Deutsche Vierteljahrs-Schrift 32, Nr. 127, Stuttgart 1869, 263-332
– Aesthetische Forschungen, Frankfurt/Main 1855
– Das Pentagramm, Kulturhistorische Studie, in: Deutsche Vierteljahrs-Schrift 31. 1. 1868
ZEUTHEN H. G., Die Lehre von den Kegelschnitten, Nachdruck Hildesheim 1966
– Théorème de Pythagore, Genf 1904
ZIMANN J.,Wie zuverlässig ist wissenschaftliche Erkenntnis?, Braunschweig 1982
ZIMANYI K., Über den Pyrit von Kotterbach im Comitat Szepes, in: Zeitschrift für Krystallographie 39, 1904, 125-141, Tafel III und IV
– Über Pyritkrystalle von Spanish Peaks in Colorado, in: Zeitschrift für Krystallographie 51, 1913, 146-148
ZIMMER Ernst, Umsturz im Weltbild der Physik, München 1961



